فاعلية إطار تدريس قائم على DNR في تعزيز مخططات البرهان الرياضي لدى طلبة الصف الحادي عشر

إعداد

أ/ ميرام محمد فخري بني سليم

طالبة دكتوراه– جامعة اليرموك– الأردن

أ.د/ أمل عبدالله خصاونة

مناهج الرياضيات أساليب تدريسها

قسم المناهج وطرق التدريس– كلية التربية– جامعة اليرموك

فاعلية إطار تدريس قائم على DNR في تعزيز مخططات البرهان الرياضي لدى طلبة الصف الحادي عشر

أ/ ميرام محمد فخري بني سليم و أ.د/ أمل عبدالله خصاونة*

الملخّص:

هدفت الدراسة الحالية إلى الكشف عن فاعلية إطار تدريس قائم على DNR في تطوير مخططات البرهان الرياضي لدى طلبة الصف الحادي عشر علمي. وتم اختيار عينة متيسرة تكونت من (60) طالبة من طالبات الصف الحادي عشر في إحدى مدارس مديرية تربية لواء قصبة عمان، توزعن على مجموعتين بالتساوي: ضابطة درست وحدة الإقترانات الأسية واللوغاريتمية بالطريقة الاعتيادية، وتجريبية درست نفس الوحدة بطريقة التعلم القائم على DNR. ولتحقيق أهداف الدراسة، تم إعداد دليل معلم لوحدة الإقترانات الأسية واللوغاريتمية وفق إطار التدريس القائم على DNR والأنشطة المرافقة له، واختبار مخططات البرهان الرياضي.

أظهرت نتائج الدراسة وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين أداء المجموعتين التجريبية والضابطة على اختبار مخططات البرهان الرياضي ولصالح المجموعة التجريبية ، كما أسفرت النتائج عن استخدام طالبات المجموعة التجريبية مخططات البرهان التجريبي والإستنتاجي، بينما استخدمت طالبات المجموعة الضابطة مخططات البرهان التجريبي ومخططات القناعة الخارجية. وبناءً على ما تقدم، فقد أوصت الدراسة باستخدام إطار التدريس القائم على DNR في موضوعات متنوعة من الرياضيات وتضمين أنشطته في المناهج الدراسية، وعقد دورات تدريبية للمعلمين تتضمن التعلم القائم على DNR وآلية تطبيقه.

الكلمات المفتاحية: إطار التدريس القائم على DNR، مخططات البرهان الرياضي، البرهان الاستنتاجي، البرهان الاستقرائي، تعليم الرياضيات.

* أ/ **ميرام محمد فخري بني سليم:** طالبة دكتوراه– جامعة اليرموك– الأردن.

أ.د/ أمل عبدالله خصاونة: مناهج الرياضيات أساليب تدريسها– قسم المناهج وطرق التدريس– كلية التربية– جامعة اليرموك.

The Effectiveness of a DNR-Based Instruction Framework on the Enhancement of Mathematical Proof Schemes among Eleventh Grade Students

Abstract

The purpose of the study was to investigate the effect of a DNR-based instruction framework on the enhancement of eleventh-grade students' mathematical proof schemes. The sample includes 60 female eleventh-grade students enrolled in a school that follows an educational directorate in Amman.The students were distributed equally into two groups: an experimental group studied exponential and logarithmic functions module by the DNR-based learning method, and a control group that studied the same module using the conventional method. A teacher's guide for the module of the exponential and logarithmic functions was developed in accordance with the DNR-based instruction framework and its supporting activities. Moreover, a mathematical proof schemes test and reflective interviews were used to collect data.

The findings of the study demonstrated that the experimental group outperformed significantly the control group on the mathematical proof schemes test. Moreover, the findings revealed that the experimental group employed deductive and experimental proof schemes, whereas, the control group employed experimental and external conviction schemes. Based on the findings of the study, the study suggested that the DNR-based instruction can be used to teach a variety of mathematics topics.

Keywords: DNR-Based Instruction, mathematics proof schemes, deductive proof, inductive proof, mathematics education

المقدّمة:

تعد الرياضيات أداة مهمة وضرورية لتدريس المهارات الأساسية ومساعدة الطلبة على تعلم التفكير بطريقة منطقية، إذ تعتمد الرياضيات بشكل أساسي على المنطق (lailiyah et.al., 2023b). وقد عرَّف هاريل الرياضيات (Harel, 2008) على أنها اتحاد لفئتين من المعرفة هما: طرق الفهم وطرق التفكير، ونظراً لأن التفكير الاستنتاجي هو الطريقة الأكثر مركزية في التفكير في الرياضيات لذلك لابد أن يكون البرهان الرياضي محوراً رئيساً لمناهج الرياضيات؛ حيث يعد البرهان الرياضي من أهم طرق التفكير في الرياضيات. ويعتبره العديد من الرياضيين والرياضيين التربويين في قمة مستويات التفكير في الرياضيات(Tall, 1995)، و في قمة مستويات تعلم المفهوم الرياضي. وتشير خصاونة (٢٠٠٩) بأن البرهان الرياضي يعد من أعقد النشاطات المستخدمة في حل المسألة فهو المرحلة الأخيرة التي يتم فيها عرض صحة الأفكار الرياضية بعد المرور بمرحلة هورستيكا الحل، وهو أدق استراتيجية مستخدمة في حل المسألة من نوع الإثبات.

كما تتميز الرياضيات عن غيرها من العلوم بأنّها تستخدم البرهان الرياضي بدقة معينة وهذا ما أكده كرانتز(٢٠٠٧) المشار إليه في أكورت ودورموش (Akkurt and Durmuş, 2022) وذلك لأن البرهان أداة خاصة بالرياضيات وهو عبارة عن سلسلة من التبريرات تتيح لنا الوصول إلى نتيجة معينة من خلال قواعد منطقية. وقد اعتمد المجلس القومي الأمريكي لمعلمي الرياضيات (NCTM, 2000) البرهان والتبرير كأحد معايير العمليات إلى جانب معايير حل المسألة، والتواصل الرياضي، والربط، والتمثيل، وذلك من أجل تنمية القدرات الرياضية في كافة مجالات المعرفة الرياضية وفي مقدمتها الأعداد، والعمليات، والجبر، والهندسة، والقياس، والإحصاء والاحتمالات سواء كانت هذه القدرات بناء مفاهيم، أو قدرات تفكير عليا. ولذلك فإن البرهان الرياضي بشكل خاص هو عملية استدلال وبشكل عام هو جزء مهم من الرياضيات بل هو العنصر الأساس (Hanna and DeVilliers, 2012). وتضيف ألميدا (Almeida, 2000) بأن عملية الإثبات ماهي إلا نشاط جوهري في الرياضيات وهي جزء لا يتجزأ من المنهج الدراسي، وهذا ما يؤكده سيهان وآكوك(Akkoç, 2023 Cihan and) من خلال الدور المهم الذي يؤديه البرهان الرياضي في تطوير التفكير الرياضي المتقدم والتبرير، لذلك لابد من تعلم الطلبة بناء البرهان الرياضي كجزء مهم ومؤشر واضح على الفهم في الرياضيات. ويشير هنّا وميسون ((Hann and Mason, 2016 بأنّ البرهان والحجج المنطقية من المكونات الأساسية للكفاءة الرياضية، لأنه بدون برهان لا يمكن التحقق من صحة

الأفكار الجديدة والتخمينات، كما أن البرهان الرياضي يساعد في التحقق من التخمينات والتوضيح والتواصل والاستكشاف.

وقد أكد هاريل(Harel, 2001) أن البرهان من الإجراءات العقلية التي تميز طرق التفكير عند الطلبة، كما أن مخططات البرهان تعطي وصفاً دقيقا عن طرق التفكير المتعلقة بالبرهان. ويضيف هاريل وراين (Harel and Rabin, 2010) بأنّ مخططات البرهان هي سمة دائمة للأدلة التي يقدمها الطلبة، وتعطي نظرة ثاقبة عن طرق التفكير لديهم. ويعرّف هاريل وساودر (Harel and Sowder, 2007) عملية الإثبات أو البرهنة على أنها الفعل العقلي لمجموعة أشخاص أو مجتمع رياضيات من أجل إزالة الشكوك حول حقيقة ما بشكل مؤكد، ويشيران بأنّ فعل الإثبات مدعوم بواحد من أمرين وهما: التحقق أو الإقناع أو بمزيج بينهما؛ حيث أن التحقق هو الفعل الذي يستخدمه الفرد لإزالة شكوكه حول حقيقة ما، أما الإقناع فهو الفعل الذي يستخدمه الفرد لإزالة شكوك الآخرين حول الحقيقة بشكل مؤكد. وقد صنف هاريل وساودر مخططات البرهان الرياضي إلى: تجريبية(Empirical)، واستنتاجية (Deductive)، وقناعة خارجية(External Conviction) . ويوضح جدول (١) تصنيف مخططات البرهان الرياضي حسب هاريل وساودر (Harel and Sowder, 1998, 2007).

جدول (١) تصنيف لمخططات البرهان الرياضي حسب هاريل وساودر.

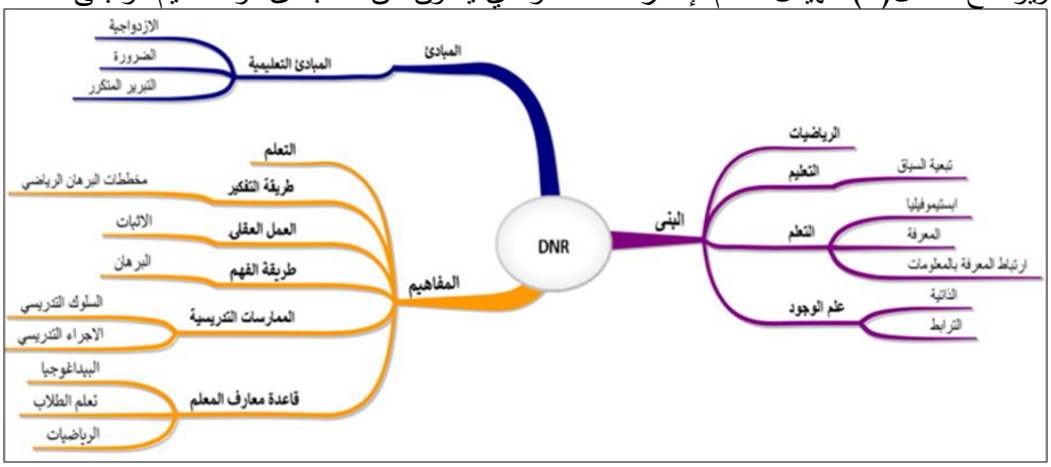
استنتاجي (Deductive)	تجريبي (Empirical)	قناعة خارجية (External Conviction)
تحويلي (Transformational)	استقرائي (Inductive)	سلطوي (Authoritative)
بديهية حديثة (Modern axiomatic)	ادراكي حسي (Perceptual)	طقوس (Ritual)
		غير مرجعي (Non-referential)

ومن أجل تطوير هذه المخططات لابد من تطوير استراتيجيات ونماذج وأطر تدريسية مبتكرة وفعّالة، تهدف إلى تلبية احتياجات الطلبة المتنوعة وتوفر بيئات تعليمية تفاعلية ومحفزة، في مجال تعليم وتعلم الرياضيات، وتركز على تحسين الفهم العميق والمهارات التحليلية لدى الطلبة، كما تشير الأدبيات التربوية إلى أن الاستراتيجيات التدريسية الفعّالة تتجاوز مجرد نقل المعرفة، لتشمل أيضاً تطوير مهارات التفكير المختلفة، وتعزيز التعلم الذاتي والتعاوني (NCTM, 2000).

إن النماذج والأطر التدريسية توفر بُنية أساسية منظمة تساعد المعلمين في تخطيط وتنفيذ عملية التدريس بطرق ممنهجة وفعّالة. ومع التقدم المستمر في مناهج الرياضيات، هنالك جهود

مستمرة، ومكرسة لتحسين تعليم وتعلم الرياضيات. هذه الجهود جاءت ردًا على الدعوات التي تطالب بإعادة النظر في أهداف الرياضيات واستراتيجيات تعليمها وطرق تقييم تعلمها، ومن هنا كان لابد من التركيز على استخدام استراتيجيات وطرائق تدريس تتمحور حول الطالب وتقوم بشكل أساسي على الاستنتاج، والاستقراء، والاستقصاء، والتفكير الناقد، والتفكير التأملي، والتفكير الرياضي وحل المشكلات (Dreyfus, 2002; Haril, 2010; Housman and Porter, 2003).

ويعدّ إطار DNR الذي قدّمه هاريل أحد أطر تعليم الرياضيات، ويهدف إلى تعزيز الفهم الرياضي العميق من خلال دمج ثلاثة مبادئ رئيسة: الازدواجية (المزاوجة بين طرق التفكير وطرق الفهم)، الضرورة (إدراك الطلبة للحاجة الحقيقية لفهم المفاهيم الرياضية)، والتبرير المتكرر (تعزيز التفكير النقدي والتحليلي عبر التكرار المدروس والممنهج) (Harel, 2008)، ويوضح الشكل(١) الهيكل العام لإطار DNR والذي يتكون من: المبادئ، والمفاهيم، والبنى.



شكل(١): الهيكل العام لإطار DNR (Harel, 2008, p:903)

ويعمل مبدأ الازدواجية على تطوير طرق التفكير لدى الطلبة من خلال إنتاج طرق الفهم، وعلى العكس من ذلك، تتأثر طرق الفهم التي ينتجها الطلبة بطرق التفكير التي يمتلكونها، حيث أن طرق تفكير الطالب هي جزء من رؤيته للبيئة المحيطة، وأن طرق الفهم هي مظاهر لأفعاله (Harel, 2001). وبصورة أكثر تحديداً، فإن طرق الفهم هي تصورات فردية للتعريفات والنظريات والبراهين والمشكلات وحلولها، بينما طرق التفكير هي الأدوات المفاهيمية اللازمة للطالب لبناء هذه التصورات وهي ثلاثة إجراءات مترابطة: حل المشكلات، ومخططات البرهان الرياضي، والمعتقدات حول الرياضيات (Harel, 2018) .

وينص مبدأ الضرورة على أنه لكي يتعلم الطلبة الرياضيات التي نريد تدريسها، يجب أن يكون لديهم حاجة إليها، حيث تشير كلمة "الحاجة" هنا إلى الحاجة الفكرية التي ترتبط ارتباطاً وثيقاً بما يسمى المسوغ المعرفي (Harel, 2010). ويتطلب المسوغ المعرفي حسب هارل وآخرون (Harel et al., 2014) إلى إدراك المتعلمين كيف ولماذا جاء هذا الجزء من المعرفة مما يؤدي إلى حالة إشكاليه يستلزم حلها إنشاء معرفة جديدة، ويسمى هذا الوضع بالحاجة الفكرية.

ويشير مبدأ التبرير المتكرر إلى ضرورة تشجيع الطلبة على استخدام التفكير النقدي والتحليلي بشكل متكرر ومستمر، ويؤكد هاريل (Harel, 2018) على أن تكرار التفكير والاستدلال الرياضي يساعد في ترسيخ المفاهيم وتعزيز المهارات الرياضية الأساسية، ومن خلال هذا المبدأ يتمكن الطلبة من بناء قدرات عقلية قوية تمكنهم من مواجهة التحديات الرياضية بثقة وكفاءة.

وفي ذات السياق، يرى هاريل (Harel, 2020) بأن أهداف التعليم المستند إلى "DNR" تتمثل في إثارة حاجة الطلبة الفكرية لتعلم الرياضيات، ومساعدتهم على اكتساب طرق رياضية للفهم والتفكير، والتأكد من استيعابهم للرياضيات التي يتعلمونها والاحتفاظ بها. ويضيف هاريل ووينستون (Harel, 2010)، بأن التعليم المبني على "DNR" في الرياضيات يعتمد على فكرة أن الطلبة يبنون معرفتهم الرياضية وفهمهم من خلال المشاركة النشطة في المهام والمفاهيم الرياضية، ويؤكد على أهمية خلق حاجة فكرية لأفكار جديدة، وتحقيق التوازن بين المحتوى الرياضي المقصود مع الفهم الحالي للطلبة، واستكشاف التفاعل بين ما إذا كانت النتيجة التي توصلوا إليها صحيحة وسبب صحتها.

كما يرى هاريل (Harel, 2018) أن بناء المعرفة يتضمن العديد من الأفعال العقلية مثل التمثيل، والتفسير، والتعريف، والحساب، والتخمين، والاستدلال، والإثبات، والبناء، والترميز، والتحويل، والتعميم، والتطبيق، والنمذجة، والربط، والتنبؤ، والتجريد، والتصنيف، والصياغة، والبحث، والتوقع، وحل المشكلات. ويشير سريرامان وآخرون(Sriraman et al., 2010) إلى أن التعليم المبني على DNR لا يقتصر في تركيزه على الأفعال العقلية التي يؤديها الطلبة وعدد المرات التي يقومون بها، بل أيضًا على منتجات وطبيعة هذه الأفعال العقلية، لذلك يعد التمييز بين ناتج الفعل العقلي وطبيعته أمرًا أساسيًا وضروريًا، لأنه يحدد محتوى الأهداف المعرفية التي يهدف إليها التعليم القائم على DNR بالإضافة إلى المعرفة التي يحتفظ بها الطالب، لذلك فإن ناتج الفعل هو نتيجة معينة لفعل عقلي يقوم به الفرد، في حين أن خصائص

الفعل العقلي هي سمة خاصة لذلك الفعل، وعلى التوالي، يُشار إليها على أنها طريقة فهم وطريقة تفكير مرتبطة بالسلوك العقلي(Harel, 2013) .

ويرى هاريل (Harel, 2008) من خلال فهم ومعالجة التفاعلات بين الفعل العقلي وطريقة الفهم وطريقة التفكير، بأنّه يمكن للمعلمين تصميم استراتيجيات تعليمية تلبي العمليات المعرفية للطلبة، وتعزز الفهم العميق للمفاهيم الرياضية، وتعزز مهاراتهم في حل المشكلات والاستدلال الرياضي. ولتوضيح طرق التفكير وطرق الفهم والتميز بينهما سنأخذ المثال الآتي: قام اثنان من طلبة الصف الأول بحل المسألة "٣+٤= ؟؟" من خلال مقابلتهم والحديث معهم فإنّ الأول يفسر إشارة المساواة على أنها مجرد أمر يتطلب إضافة ٣ الى ٤ وكتابة النتيجة في المكان المخصص لذلك، بينما يفسر طالب آخر المساواة على أنها مساواة بين كميتين تتطلب الجمع بين الكمية ٣ والكمية ٤ لإيجاد كمية غير معروفة وهذه هي طريقة فهمهم لإشارة المساواة وهذا بدوره ينقلنا إلى طريقة تفكير كل منهما فالأول تخلو طريقة تفكيرة من الاعتبارات الكمية، بينما الآخر يقوم تفكيره على الأساس الكمي (Harel, 2020) .

أما على مستوى النظام التربوي في الأردن، فإنّ تنمية قدرات الطلبة على التفكير المنطقي من خلال البرهان الرياضي والتبرير، يعد من أبرز الأهداف التي وردت في مناهج الرياضيات المدرسية للمرحلتين الأساسية والثانوية، وذلك انطلاقاً من اهتمام التربويين بالتركيز عليها بوصفها واحدة من أبرز مكونات التفكير الذي يحتاجه الطلبة لتعلم وتعليم الرياضيات (وزارة التربية والتعليم، 2018). واستنادا إلى ما تقدم برزت الحاجة إلى مثل هذه الدراسة، حيث تمثلت مشكلة الدراسة في التساؤل الآتي: "**ما فاعلية إطار تدريس قائم على DNRفي تطوير مخططات البرهان الرياضي لدى طلبة الصف الحادي عشر علمي**"؟.

مشكلة الدراسة:

تعد مخططات البرهان الرياضي في مقدمة طرق التفكير التي تحتاج إلى مزيد من الاهتمام في ظل التحولات بالنسبة لتدريس الرياضيات في القرن الحادي والعشرين، وفي مقدمة تلك التحولات تغير التركيز من الحسابات والإجراءات إلى التبرير والتفكير بأنواعه المختلفة، وفي هذا السياق يتساءل أوزاركا (Ozarka, 2016) لماذا يخفق الطلبة في الأداء في الرياضيات؟ وهل يعود ذلك إلى تعدد معايير الأداء المطلوبة من قبل الطلبة في الرياضيات، أم الى نقص في تحدياتهم الذهنية، أم إلى طرق التدريس؟ ويرى أوزاركا أن سبب الإخفاق في الرياضيات هي عدم التركيز على طرق التدريس التي تركز على المنطق والتبرير والتفكير الناقد والترابط والدقة، وكلها تحتاج إلى ضرورة إعادة النظر في تعليم الرياضيات.

ويشير المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية في الأردن(2019) إلى أن النسب المئوية الأردنية لأداء الطلبة في اختبار التيمس (TIMSS) في الرياضيات بلغت في المعرفة (٣٣%)، والتطبيق(٢٣%)، والتفكير والتبرير(١٩%)، مما يشير إلى ضرورة الاهتمام بالبرهنة والتبرير ليواكب الطلبة في الأردن مستويات التنافس العالمية للأداء في الرياضيات، علما بأن هذا الأداء لدى الطلبة في الأردن لا يتقدم بالمستوى المطلوب ، بل يتراجع أحيانا، ويعد ترتيب أداء الطلبة في الأردن متأخرا عن المستويين العربي والعالمي، وهذا يؤكد ضرورة إعادة النظر في طرق التدريس، ويدعونا كتربويين لإجراء كل ما يلزم لوقف هذا التراجع والعمل على النهوض بمستويات طلبتنا والارتقاء بها إلى المستويات الدولية في عالم شديد التنافسية والذي يركز على مهارات التفكير المتقدمة أكثر من أي شيء أخر. ومن هنا تبادر الشعور بأهمية محاولة البحث عن أطر وطرق حديثة لتدريس الطلبة على كيفية البحث في بنائهم المعرفي للوصول إلى أرقى مهارات التفكير العليا ألا وهو البرهان الرياضي.

ومن خلال العمل الميداني في مدارس وزارة التربية والتعليم، لوحظ ضعف الطلبة في التعامل مع المسائل التي تتطلب برهاناً رياضيًا ، بالإضافة للاتجاهات السلبية سواء من المعلمين أو الطلبة حول موضوع البرهان الرياضي، وهذا ما دفع للبحث حول استراتيجية وأطر ونماذج جديده تركز على تعريض الطلبة لفرص وخبرات غنية ، والاطّلاع على مخططات البرهان المتنوعة التي يمتلكها الطلبة مع التركيز على مرحلة مهمة وانتقالية ألا وهي المرحلة الثانوية. كما أن مناهج الرياضيات في الأردن تشهد حركة تعديل وتطوير مع التركيز على تنمية مهارات تفكير عليا ومن أهمها البرهان والتبرير، وهذا ما دعا لاختيار هذا الموضوع.

علاوة على ما سبق ومن خلال مراجعة الأدب البحثي، فهناك ثغرة في مجال الدراسة الحالية، إذ تندر الدراسات على المستوى العالمي في مجال استخدام إطار DNR وتكاد تكون معدومة على المستوى العربي، واستنادا إلى ما سبق من ضرورة إعادة النظر في طرق التدريس، وتدني الأداء في الرياضيات مقارنة بمتوسط الأداء العالمي، والخبرة الشخصية في صعوبة البرهان الرياضي والتركيز على التبرير بطرق متعددة، جاءت هذه الدراسة لتقصّي فاعلية إطار تدريس قائم على DNR في تعزيز مخططات البرهان الرياضي لدى طالبات الصف الحادي عشر العلمي؟

وبالتحديد تجيب الدراسة عن الأسئلة الآتية:

١) هل يختلف أداء طالبات الصف الحادي عشر العلمي وبدلالة إحصائية (α = ٠.٠٥) على اختبار مخططات البرهان الرياضي باختلاف طريقة التدريس (DNR، اعتيادية)؟

٢) ما طبيعة مخططات البرهان الرياضي التي تستخدمها طالبات الصف الحادي عشر العلمي؟ وهل تختلف تبعا لطريقة التدريس؟

أهمية الدراسة:

تبرز أهمية هذه الدراسة في الجوانب الآتية:

- تعد هذه الدراسة هي الأولى من نوعها على المستوى المحلي والعربي –على حد علم الباحثين– لاسيما وأن مراجعة الدراسات السابقة التي أجريت في البيئة الأردنية والعربية تبين ندرة وغياب الدراسات التي تبحث في فاعلية إطار التدريس القائم علىDNR في تطوير مخططات البرهان الرياضي.
- تقدم هذه الدراسة مجموعة من الأنشطة القائمة على DNR في تدريس الرياضيات، الأمر الذي قد يفيد معلمي الرياضيات بالمرحلة الثانوية في الاهتمام بمخططات البرهان الرياضي الرسمية وغير الرسمية، وإجراء دورات تدريبية للمعلمين للتعرف على هذا الإطار.
- تفتح الدراسة الحالية باباً جديدا للباحثين لإجراء مزيد من الدراسات التي تسلط الضوء على إطار DNR، ومخططات البرهان المختلفة للمراحل الثانوية، كما أنها تزودهم بإطار نظري حول متغيرات الدراسة وأدواتها.

المصطلحات وتعريفاتها الإجرائية:

- **الفاعلية:** تعرّف إجرائياً بأنها قدرة الأنشطة التعليمية–التعلمية القائمة على DNR على تعزيز مخططات البرهان الرياضي التي تستخدمها طالبات المجموعة التجريبية، مقارنة بالمخططات التي تستخدمها طالبات المجموعة الضابطة، نتيجة أدائهنّ على اختبار مخططات البرهان الرياضي، الذي تم إعداده لهذا الغرض، كما تتمثل الفاعلية بحجم الأثر لطريقة التدريس في المتغيرات التابعة.
- **إطار التدريس القائم على DNR:** مجموعة الأنشطة والتفاعلات والاجراءات الصفية التي تهدف إلى تطوير طرق التفكير وطرق الفهم لدى الطلبة من خلال التركيز على أدوات مفاهيمية متمثلة بـ: حل المشكلات الرياضية، والمعتقدات حول الرياضيات، ومخططات البرهان الرياضي. ويقوم هذا الإطار على ثلاثة مبادئ أساسية وهي: مبدأ الازدواجية، ومبدأ الضرورة ومبدأ التبرير المتكرر (Harel, et al., 2014; Harel, 2008, 2013).
- **البرهان الرياضي:** هو عبارة عن سلسلة من العبارات المترابطة منطقياً تستنبط كل منها من سابقتها معتمدة بذلك على المسلمات والنظريات التي سبق برهنتها على شكل معالجات لفظية أو رمزية أو الاثنين معاً (Harel, 2007).

- **مخططات البرهان الرياضي:** هي الأطر العقلية أو الهياكل الذهنية التي يستخدمها الطلبة عند بناء وتقديم البراهين الرياضية، وتشمل ثلاثة مكونات رئيسة: التمثيلات الذهنية، والعمليات أو الخطوات الذهنية التي يتبعها الطلبة لمعالجة المشكلة، والحجج والأدلة التي يستخدمها الطلبة لدعم صحة البرهان. وقد اعتمدت هذه الدراسة تصنيف هاريل وساودر (Harel and Sowder, 1998, 2007) من أجل الكشف عن مخططات البرهان الرياضي لدى طلبة الصف الحادي عشر، وتتضمن ثلاثة تصنيفات: قناعة خارجية، ومخططات تجريبية، ومخططات استنتاجية، ويقاس الأداء على اختبار مخططات البرهان اجرائيا بالعلامة التي تحصل عليها الطالبة في الاختبار المعد لهذا الغرض.
- **مخططات القناعة الخارجية:** كل ما يقدمه الطلبة من مصادر خارجية لإقناع أنفسهم والآخرين، وهي مصدر سلطوي (معلم، كتاب مدرسي)، ومصدر طقوسي (الشكل العام للبرهان)، ومصدر غير مرجعي (التعامل مع الرموز بشكل مستقل عن المعنى).
- **مخططات تجريبية:** أساليب تبرير تستند إلى عدد محدود من الأمثلة والملاحظات التي تُستخدم لاستخلاص نتائج عامة (استقراء)، ولا تعتمد على الاستدلال المنطقي.
- **مخططات استنتاجية:** أساليب برهنة يستخدم فيها المنطق الرياضي، وتعتمد على الاستنتاجات المنطقية المستمدة من القواعد الرياضية، مثل التعريفات، البديهيات، والنظريات.

حدود ومحددات الدراسة:

تتمثل حدود ومحددات الدراسة التي تحول دون تعميم النتائج على: اقتصار المادة التعليمية على وحدة الاقترانات الأسية واللوغرتمية من كتاب الرياضيات للصف الحادي عشر، واقتصارها على الطلبة الإناث الملتحقات بإحدى المدارس الحكومية التابعة لمديرية التربية والتعليم في لواء قصبة عمّان للعام الدراسي (٢٠٢١-٢٠٢٢)، والخصائص السيكومترية لأدوات جمع البيانات.

الدراسات السابقة:

بعد الاطلاع على الدراسات السابقة من خلال قواعد البيانات المختلفة التي تناولت إطار التدريس القائم على DNR ومخططات البرهان الرياضي، تمّ عرضها بتسلسل زمني من الأقدم إلى الأحدث، علما بأنه يوجد ندرة في الدراسات التي تناولت إطار DNR على المستوى العالمي، وهي تكاد تكون معدومة على المستويين العربي والمحلي.

فقد هدفت دراسة أجراها هاريل (Harel, 2001) إلى تطوير الاستقراء الرياضي الذي يعد أحد مخططات البرهان من خلال إطار تدريس قائم على DNR وركزت على الكشف عن مفهوم الطلبة للاستقراء الرياضي، والصعوبات التي يواجهها معلمو ما قبل الخدمة مع تطور مفهوم البرهان الرياضي والتي تم تطبيقها على مجموعة من معلمي ما قبل الخدمة، وأسفرت النتائج عن فاعلية إطار التدريس القائم على DNR في معالجة الصعوبات التي يوجهها معلمو ما قبل الخدمة في استخدام الاستقراء الرياضي.

وعلى المستوى المحلي، قامت خصاونة (٢٠٠٩) بدراسة للتعرف على مفهوم البرهان الرياضي لدى معلمي الرياضيات ومقدرتهم في الحكم على صدقه وبنائه حيث استطلعت أراء (٤٨) معلماً ومعلمة وذلك من خلال إجابتهم على مجموعة من الأسئلة المفتوحة التي أعدتها أظهرت النتائج بأنّ المعلمين والمعلمات يدركون طبيعة البرهان الرياضي ودوره في الرياضيات، وأنّهم أكثر قدرة على التمييز بين المحاكمات الصحيحة منها وغير الصحيحة. وكانت الطريقة والإجراءات في مقدمة معايير حكمهم على صحة البرهان. وبالنسبة لمقدرتهم على بناء البراهين الاستنتاجية المنطقية، فقد تباينت بين المسألة الهندسية والمسألة الحسابية، ولصالح المسألة الهندسية. كما تباينت نماذج البراهين المقدمة لكل من المسألتين الهندسية والحسابية.

وفي دراسة لتاباش وآخرون (Tabach et al., 2010) هدفت للإجابة عن السؤال: هل يعد التبرير الشفوي برهاناً من وجهة نظر المعلمين؟ وللإجابة على ذلك تم اختيار (٥٠) معلماً ممن يدرسون المرحلة الثانوية ولديهم خبرة لا تقل عن سنتين، حيث طلب منهم الإجابة على ٣ استبانات: الأولى عبارة عن مسائل في البرهان في موضوع نظرية الأعداد طلب منهم فيها كتابة البراهين التي من المتوقع أن يقوم بها الطلبة سواء كانت صحيحة أو خاطئة؛ الثانية مجموعة من براهين الطلبة على مسائل متنوعة وطلب من المعلمين تصحيحها؛ الثالثة مقابلة مع المعلمين تضمنت مجموعة من الأسئلة. وقد تبين بعد تحليل الاجابات أن المعلمين ليسوا مدركين لتفضيل الطلبة للبراهين الشفوية، كما رفض المعلمون التبريرات الشفوية حيث أدّعوا أنها تفتقر للعمومية فهي مجرد أمثلة على الرغم من صحتها.

ومن منظور آخر للمعلمين هو أن الشرح الذاتي والتدريب المستمر يحسّن القدرة على فهم وبناء البرهان جاءت دراسة هودز وآخرون (Hodds et al., 2014) حيث أعدوا ثلاث مهمات تهدف إلى تركيز الاهتمام على العلاقات المنطقية في البرهان الرياضي وذلك لتحسين فهم البرهان الرياضي. وبعد تطبيقها على عينة من الطلبة مكونة من (١٥) طالب وتحليل الإجابات تبين أن الطلبة الذين تلقوا التدريب أعطوا تفسيرات ذات جودة عالية وأداء أفضل بنسبة (٩٥%) في اختبار الفهم الذي أعده الباحث لغايات الدراسة، كما ازداد انخراط الطلبة المعرفي واهتمامهم

بالبرهان، وأن الدراسة الذاتية ولمدة (١٥) دقيقة في الحصة تحسَّن الفهم والاحتفاظ بالمعلومة لمدة أطول.

وقد أجرى لي (Lee, 2016) دراسة هدفت للكشف عن مخططات البرهان الرياضي لعينة تكونت من(٦٠) طالبا في المرحلة الثانوية تتراوح أعمارهم بين (١٤-١٥ عام) قاموا بتقديم (٤٨٠) مخطط برهان رياضي، ويكمن الغرض من هذه الدراسة في إنشاء تصنيف لمخططات البرهان الرياضي التي تكشف تقدم الطلبة نحو التفكير الاستنتاجي في إثبات ودحض الافتراضات الرياضية، ، حيث كشفت التصنيفات عن تقدم الطلبة من خلال استخدامهم المتطور للأمثلة المضادة والاستدلالات الاستنتاجية.

وهدفت دراسة أجراها كانليوس وآخرون (Kanellos et al., 2018)إلى تصنيف مخططات البرهان الرياضي حسب تصنيف هاريل وساودر وكيف يمكن استخدامه كأداة تشخيصية لوصف تعلم طلبة المرحلة الثانوية للإثبات والبرهان في الجبر والهندسة، وتم تطبيق هذه الدراسة على عينة مكونة من (٨٥) طالباً من الصف التاسع ممن تراوحت أعمارهم (١٤-١٥) سنة، وأسفرت النتائج إلى أن الطلبة يمتلكون ستة من مخططات البرهان السبعة التي اقترحها هيرل وساودر وهي: قناعة خارجية (طقوس، سلطة، رمزي غير مرجعي) ، تجريبي(استقرائي، إدراك حسي) ، ومخططات الإثبات التحويلية.

وفي دراسة وصفيه أجرتها سيرز(Sears, 2018) هدفت إلى تحديد مخططات البرهان الرياضي التي يستخدمها مدرسو الرياضيات ما قبل الخدمة و المسجلين في دورات تعليم الرياضيات للسنتين الثالثة والرابعة الجامعيتين، وتكوّنت عينة الدراسة من ستة معلمين، وقد أظهرت نتائج الدراسة أن هناك تباينًا في مخططات البرهان المستخدمة من قبل المعلمين، وذلك اعتمادًا على المرحلة التي يدرسونها، وقد توزعت كما يلي: مدرسو ما قبل الخدمة في المدارس المتوسطة، والذين يسعون للحصول على شهادة للتدريس من الصف الخامس إلى التاسع يقومون -في الغالب- باستخدام مخططات إثبات خارجية، بينما استخدم المعلمون الذين يسعون لتدريس المرحلة المزدوجة (المتوسطة والثانوية) في المقام الأول مخططات إثبات تجريبية. ومع ذلك، استخدم معلمو الرياضيات ما قبل الخدمة الذين يسعون لتدريس المرحلة الثانوية (من الصف التاسع إلى الثاني عشر)، مجموعة متنوعة من مخططات الإثبات.

وقد جاءت دراسة أجراها رحماواتي وآخرون (Rahmawati et al., 2019) بهدف وصف مخططات البرهان الرياضي التي استخدمها الطلبة لدحض الفرضيات الرياضية في موضوعات التفاضل والتكامل، ونظرية الأعداد الأولية، والاقترانات التربيعية، والهندسة، تكونت

عينة الدراسة من ٢٠ طالبًا في الصف الحادي عشر، وكان على جميع المشاركين الإجابة على اختبارين، وهما اختبار القدرة في الرياضيات واختبار الإثبات. وتم اختيار ثلاثة من الطلبة (١ ذكر و٢ أنثى)، ذوي قدرة عالية في الرياضيات ودرجات عالية في اختبار الاستدلال، المعد لذلك، وبعدها تم إجراء مقابلة شبه مقننة معهم للتحقق من مخططات البرهان الرياضي التي قاموا باستخدامها وتصنيفها في ستة مستويات. وأظهرت النتائج أن جميع المشاركين في موضوع قابلية القسمة صنفوا في المستوى الرابع لأنهم تمكنوا من إثبات عدم صدق القضايا الرياضية بمثال مضاد محدد ولكنهم لم يتمكنوا من تغيير المثال المضاد المحدد ليصبح مثالًا مضادًا عامًا برموز رياضية.

وأجرى أوفلاز وآخرون (Oflaz et al., 2019) دراسة مقارنة هدفت الى تحديد مخططات البرهان الرياضي لمعلمي الرياضيات ماقبل الخدمة من جامعتين حكوميتين، أحدهما في تركيا والأخرى في إسبانيا والتعرف على معتقدات معلمي ما قبل الخدمة والصعوبات التي يواجهونها، حيث أن معرفتهم بهذه القضية يمكن أن تؤثر على ممارساتهم التعليمية. وكان المشاركون من معلمي الرياضيات ماقبل الخدمة في السنة الثانية من الدراسة في الأقسام المعنية بتدريس تعليم الرياضيات في كل جامعة. استخدمت الدراسة تصميم دراسة الحالة، والذي تضمن إجراء اختبار إثبات يتكون من أربعة أسئلة تتعلق بمتوازي الأضلاع كما تم إجراء مقابلات شبه مقننة مع مشاركين مختارين للحصول على رؤى متعمقة حول إجاباتهم والمنطق وراء مخططات الإثبات الخاصة بهم. تم تصنيف الإجابات باستخدام تصنيف Harel و Sowder لمخططات البرهان الرياضي، وأشارت نتائج الدراسة إلى أن غالبية معلمي الرياضيات ما قبل الخدمة من كل من تركيا وإسبانيا يواجهون صعوبة في استكمال البراهين بدقة. كما أنهم استخدموا في الغالب مخططات الإدانة الخارجية، والتحويلية، ومخططات الإثبات الطقسية، مع استخدام محدود لمخططات البرهان الاستنتاجية، وقد لوحظ اختلافات في مخططات البرهان بين معلمي ما قبل الخدمة الأتراك والإسبان، حيث يميل المعلمون الأتراك نحو المخططات الاستنتاجية والمعلمون الإسبان نحو المخططات التجريبية.

وفي دراسة أجراها حمداني وآخرون (Hamdani et al., 2021) هدفت إلى تحليل كيفية قيام الطلبة ببناء البراهين باستخدام مخططات مختلفة ، وكيف تؤثر عمليات الاستيعاب والتكيف على بناء البراهين الرياضية، وقد أجريت الدراسة على ٣٧ طالبًا ، تضمنت إجراءاتها طرح أسئلة تتطلب برهاناً على الطلبة في موضوع نظرية الأعداد وتحليل إجاباتهم لفهم كيفية بناء البراهين ومن ثم عمل مقابلات شبة مقننة على عينة عشوائية مكونة من ثلاثة طلبة ، أشارت نتائج الدراسة إلى أن الطلبة استخدموا مخططات بناء مختلفة، بما في ذلك المخططات التي

تستخدم النظريات أو التعاريف أو مزيج من الاثنين معا، لبناء البراهين المتعلقة بقابلية قسمة الأعداد الصحيحة وقد قدّم تحليل مخططات البرهان نظرة ثاقبة حول كيفية استيعاب الطلبة للمعلومات الجديدة واستيعاب الهياكل المعرفية الموجودة عند إثبات النظريات في موضوع نظرية الأعداد، وسلّطت الدراسة الضوء على أهمية فهم العمليات المعرفية التي ينطوي عليها التفكير الرياضي وحل المشكلات في سياق بناء البرهان.

وهدفت دراسة اير ودوست (Er and Dost, 2022) إلى تحسين مهارات البرهان لدى معلمي الرياضيات ما قبل الخدمة من خلال استخدام مهام البرهان المصممة لتوجيه معلمي الرياضيات ما قبل الخدمة في عملية البرهان بهدف تعزيز مهارات البرهان لديهم، حيث أجريت الدراسة على ثلاثة متطوعين من معلمي الرياضيات في إحدى الجامعات الحكومية. وتضمنت إجراءات الدراسة تطبيق مهام البرهان المصممة لتوجيه معلمي الرياضيات ما قبل الخدمة في عملية البرهان، وتم جمع البيانات من المهام والمقابلات الفردية على مدى أربعة أسابيع، وقد أشارت نتائج الدراسة إلى أن المهام ساهمت في تنمية مهارات الإثبات لدى المشاركين، ومن خلال التحليل النوعي للبيانات التي تم جمعها من المشاركين، وجدت الدراسة أن مهام البرهان المصممة كان لها تأثير إيجابي على قدرة المشاركين على الانخراط في عملية البرهان وتعزيز فهمهم للبراهين الرياضية كما أن الاستخدام المنهجي لمهام البرهان يمكن أن يكون مفيدًا في تحسين مهارات الإثبات لدى معلمي الرياضيات ما قبل الخدمة وإعدادهم لتدريس الرياضيات الفعال في المستقبل.

أما أوزتورك وجوفن(Ozturk and Guven, 2022) فقد أجريا دراسة هدفت الى تحديد المعايير التي يأخذها معلمو الرياضيات قبل الخدمة في الاعتبار عند تقييم البراهين الرياضية، مع التركيز على كل من المبررات ومعايير اللغة الرياضية، بلغت عينة الدراسة ٥٠ طالبًا جامعيًا في السنة الأولى مسجلين في برنامج تعليم معلمي الرياضيات للمرحلة الابتدائية، وتم جمع البيانات من خلال أنشطة تتعلق بالإثبات، حيث قام المعلمون قبل الخدمة بتقييم الأدلة بناءً على معايير محددة، من حيث المبررات والاستخدام السليم للغة الرياضية. تم إجراء تحليل المحتوى لتصنيف البيانات وتحديد الأبعاد والفئات الفرعية لتقييم البرهان ومن ثم تمت مقارنة تقييمات الباحثين مع تقييمات المعلمين قبل الخدمة للتعرف على أوجه الاختلاف والتشابه في أساليبهم في تقويم البرهان، أكد معلمو الرياضيات قبل الخدمة بالدرجة الأولى على معيار استخدام التعريفات أو البديهيات أو النظريات المناسبة في خطوات البرهان عند تقويم البراهين، كما اعتبروا الاستخدام المناسب للغة الرمزية معيارًا حاسمًا في تقييم الإثبات، ومع ذلك، مال

المشاركون إلى التغاضي عن المواقف التي تم فيها استخدام لغة غير رمزية في البراهين، مما يشير إلى مجال محتمل للتحسين في بيئات تعلم الرياضيات، وأبرزت الدراسة أهمية مراعاة كل من التبرير ومعايير اللغة الرياضية في تقييم البراهين الرياضية لتعزيز قدرة الطلبة على بناء ومراجعة البراهين الخاصة بهم بشكل فعال.

وتأسيساً على ما تقدم، فإن ما يميز هذه الدراسة عن غيرها أنها ستتبع المنهج المختلط، الوصفي –النوعي وشبه التجريبي من أجل تقصّي فاعلية إطار التدريسDNR في تعزيز مخططات البرهان الرياضي، إذ لا توجد دراسات على المستوى العربي والمحلي –على حد علم الباحثين– تناولت إطار DNR، أو ركزت على مخططات البرهان الرياضي.

منهجية الدراسة وتصميمها:

اعتمدت هذه الدراسة المنهج شبة التجريبي من أجل تحقيق أهداف الدراسة المتمثلة في قياس فاعلية إطار التدريس القائم على DNR في تعزيز مخططات البرهان الرياضي لدى طالبات الصف الحادي عشر علمي، واستخدم التصميم شبة التجريبي قبلي– بعدي لمجموعتين أحدهما تجريبية والأخرى ضابطة. وبذلك تكون متغيرات الدراسة: المتغير المستقل ويتمثل بطريقة التدريس ولها مستويان وهما إطار التدريس القائم على DNR والطريقة الاعتيادية، والمتغير التابع ويتمثل بالأداء على اختبار مخططات البرهان الرياضي.

عينة الدراسة:

تكونت عينة الدراسة من (٦٠) طالبة من طالبات الصف الحادي عشر علمي في إحدى مدارس تربية لواء قصبة عمان للفصل الدراسي الثاني للعام ٢٠٢٢/٢٠٢١، وتم اختيار عينة الدراسة بالطريقة المتيسرة كون الباحثة تعمل في نفس المدرسة، وكذلك تعاون الإدارة المدرسية مع الباحثة وتسهيل مهمتها، وتم تحديد إحدى المجموعتين عشوائيا لتكون تجريبية والأخرى ضابطة، وتكونت كل مجموعة من (٣٠) طالبة، حيث يوجد شعبتان في المدرسة للصف الحادي عشر العلمي.

المادة التعليمية وأدوات الدراسة:

لتحقيق أهداف الدراسة، تم استخدام الأدوات الآتية: إطار تدريس قائم على DNR والأنشطة التعليمية المرافقة له، واختبار لتحديد مخططات البرهان الرياضي حسب تصنيف هاريل وساودر (Harel and Sowder,1998, 2007) لدى طالبات الصف الحادي عشر العلمي، وفيما يلي عرض لهذه الأدوات.

أولاً– إطار تدريس قائم على DNR والأنشطة المرافقة له:

تم بناء الأنشطة التعليمية في ضوء إطار التدريس القائم على DNR وذلك بعد الاطلاع على الأدب النظري، والأدب البحثي (Harel, 2001, 2008a, 2008b, 2010, 2013, 2018; Harel et al., 2014; Harel and Rabin, 2010)، حيث تم إعداد الاجراءات التعليمية القائمة على إطار DNR وفقا للخطوات الآتية :

١) **اختيار الماده التعليمية:** تكونت من المحتوى المعرفي لموضوع الاقترانات الأسية واللوغاريتمية من كتاب الطالب للصف الحادي عشر علمي، والمقرر تدريسة في الفصل الدراسي الثاني من العام ٢٠٢٢/٢٠٢١، وتضمنت المادة التعليمية الموضوعات الآتية: الاقترانات الأسية؛ الاقترانات اللوغاريتمية؛ قوانين اللوغاريتمات.

٢) **تحديد النتاجات التعلمية المراد تحقيقها:** بعد الاطّلاع على النتاجات االتعلمية لوحدة الاقترانات الأسية واللوغاريتمية في كتاب الرياضيات للصف الحادي عشر علمي تم تحديد تلك النتاجات موزعة على ثلاثة دروس بواقع (٢١) حصة.

٣) **التخطيط لتنفيذ إطار التدريس القائم على DNR:** بعد صياغة النتاجات، تم تحديد كافة الإجراءات التعليمية – التعلمية المتبعة لتحقيق النتاجات التي تم تحديدها، وبيان وتفصيل دور المعلم والطالب باستخدام إطار التدريس القائم على **DNR** وتم التنفيذ تبعا للإجراءات التي حددها هاريل (Harel, 2008, 2010, 2013, 2018) وبالتركيز على المبادئ الثلاثة (الإزدواجية، الضرورة، التبرير المتكرر).

إجراءات التدريس تبعا لـ DNR:

- **الإجراء الأول: الاستنتاج الأولي للطلبة:** يقوم المعلم في هذا الإجراء بطرح مهمة تتيح للطلبة عرض جميع الحلول الممكنة التي قاموا بتخمينها والتوصل إليها، سواء كانت صحيحة أم خاطئة.
- **الإجراء الثاني: فحص الاستنتاج الأولي المقدم من قبل الطلبة،** وقيام المعلم بالتوسع بالمهمة بناءً على الإجابات المشتركة التي قدمها الطلبة، وذلك من خلال طرح العديد من الأسئلة لكي يتيح للطلبة فحص حلولهم السابقة ومدى منطقيتها، ومن هنا يتحقق لديهم اليقين حول الحلول الصحيحة التي توصلوا إليها بطريقة مقنعة.
- **الإجراء الثالث: فحص الإجابات ومدى صحتها** من خلال المناقشات الجماعية وذلك من أجل الوصول إلى فهم مشترك من قبل جميع الطلبة، والاستفاده من الأخطاء التي وقعوا بها.

الإجراء الرابع: الدروس المستفادة، وهنا يذهب المعلم بمناقشاته مع طلابه إلى ما وراء المسألة وذلك بالتركيز على المفاهيم الرياضية وتحقيق الهدف الذي وضعت المهمة لأجله.

٤)**إعداد الدليل وتحكيمه:** تم إعداد دليل للماده التعليمية وذلك ليساعد في تدريس وحدة الإقترانات الأسية واللوغاريتمية من كتاب الرياضيات للصف الحادي عشر وفق إطار DNR وحسب الارشادات الموضحة في دليل المعلم، وذلك للوقوف على أثر تطبيقها في تطوير مخططات البرهان الرياضي.

ويشمل هذا الدليل على: أهداف الدليل، والأهداف العامة للوحدة، ونتاجات التعلم، ونبذه مختصرة عن إطار التدريس القائم على DNR، والدروس التي تم إعدادها وفقا لإطار DNR بحيث يتضمن كل درس: نتاجات التعلم، والمحتوى الدراسي، والأنشطة والمهمات، وخطوات التدريس وفقا لإطار DNR ، وخطة سير الدرس. فضلا عن أن كل درس يتضمن النتاجات التعلمية الخاصة به والمواد والأدوات اللازمة لتحقيق تلك النتاجات.

وقد تم تحكيم الدليل من خلال التأكد من صدق المادة التعليمية وصدق بنائه بموجب الإطار المعتمد، وذلك من خلال عرضه بصورته الأولية على المحكمين وذلك لتحقق من مدى تحقيقه للأهداف التي تم تحديدها، وتوافقه مع اطارDNR، وبناءً على ملحوظاتهم واقتراحاتهم تم إجراء التعديلات اللازمة.

ثانيًا – اختبار مخططات البرهان الرياضي:

لتحقيق أهداف الدراسة، تم إعداد اختبار مخططات البرهان الرياضي بالرجوع الى العديد من الدراسات السابقة (Housman & Porter, 2003; Harel & Rabin, 2010; Martinez et al., 2011; Lee, 2016; Sears, 2018)، وفقا للخطوات الآتية:

- إعداد(٨) مهمات –بصورة أولية– تتطلب برهاناً رياضياً تنوعت من حيث المحتوى (أعداد، جبر، هندسة) مع مراعاة أنه يمكن استخدام أكثر من مخطط من مخططات البرهان الرياضي في اثباتها، ولا تحتاج إلى معارف رياضية متقدمة بل تعتمد على خبرة الطالب الرياضية.
- التحقق من الصدق الظاهري وصدق المحتوى للاختبار، من خلال عرضه بصورتة الأولية على مجموعة من المحكمين من ذوي الخبرة والاختصاص بهدف التحقق من درجة ملاءمتة لتحقيق أهداف الدراسة، وقد تم الأخذ بالتعديلات المقترحة من المحكمين، وتم حذف مهمة واحدة، ليكون عدد مهمات الاختبار بصورته النهائية (٧) مهمات.
- تصميم إطار تصحيح (Rubric) لإختبار مخططات البرهان الرياضي ضمن تدريج رقمي بالاعتماد على نموذج هاريل وساودر والذي يتضمن تصنيفا لمخططات البرهان الرياضي

كما يوضحة الجدول (١)؛ حيث أعطيت علامة واحدة على المخططات من نوع القناعة الخارجية، وعلامتان على المخططات من النوع التجريبي، وثلاث علامات على المخططات من النوع الاستنتاجي، وصفرا في حالة لا مخطط أو مخطط لايمت بصلة للمهمة. وبذلك تكون العلامة الدنيا على الاختبار صفرا والعلامة القصوى (٢١).

- تم تطبيق الاختبار على عينة استطلاعية من خارج عينة الدراسة ومن طالبات الصف الثاني عشر وذلك لتعرضهن لدراسة الوحدة سابقا، حيث بلغ عددهن(٣٩) طالبة، وذلك من أجل التحقق من الخصائص السيكومترية للإختبار وتحديد الزمن اللازم للاجابة عليه ومدى ملاءمته للطلبة. وقد تمّ تحديد الزمن اللازم للاختبار، وذلك بحساب المتوسط الحسابي للزمن الذي استغرقته جميع طالبات العينة الاستطلاعية لإنهاء إجابات الاختبار، وتبين أن زمن الاختبار هو(٦٠) دقيقة. كما تمّ التحقق من ثبات الاختبار من خلال الاختبار وإعادة الاختبار (test-retest)، حيث تمَّ تطبيقه وإعادة تطبيقه بعد اسبوعين من التطبيق الأول على نفس العينة الاستطلاعية، ومن ثم تم حساب معامل ارتباط بيرسون في المرتين إذ بلغ (٠.٧٧) وتم اعتبار هذه القيم مناسبة لغايات هذه الدراسة (عودة، ٢٠١٠)، كما حسب معامل الثبات بطريقة الاتساق الداخلي حسب معادلة كرونباخ الفا، إذ بلغ (٠.٧٣)، واعتبرت هذه القيم ملائمة لغايات هذه الدراسة.

ومن خلال نتائج نفس العينة الاستطلاعية، تمّ التحقق من صدق الاتساق الداخلي للاختبار، وذلك من خلال حساب معاملات ارتباط المهمات مع الدرجة الكلية للأداء على الاختبار وقد تراوحت بين (٠.٦٢-٠.٨٢)، وجميعها ذات دلالة إحصائية (P<٠.٠٥)، كما تراوحت معاملات الارتباط المصحح بين درجة المهمة ودرجة الاختبار بين (٠.٤٤-٠.٧١) وجميعها ذات دلالة احصائية (P<٠.٠٥)؛ مما يشير إلى صدق بناء المقياس (Leech et al., 2011). كما حسبت معاملات الصعوبة والتمييز لكل مهمة من مهمات الاختبار، وتبين أن معاملات صعوبة الفقرات تراوحت بين (٠.٠.٥٤-٠.٧٧) وتراوحت معاملات التمييز بين(٠.٥٠-٠.٧٤)، وبناءً على ما أشار إليه عوده (٢٠١٠) لمدى قبول صعوبة الفقرة وتمييزها، لم يتم حذف أي مهمة.

النتائج:

تناول هذا الجزء عرض النتائج التي توصلت اليها الدراسة، وذلك من خلال تسلسل أسئلتها.

نتائج السؤال الأول ونصه: هل يختلف أداء طالبات الصف الحادي عشر العلمي وبدلالة إحصائية ($\alpha = 0.05$) على اختبار مخططات البرهان الرياضي باختلاف طريقة التدريس (DNR، اعتيادية)؟

للإجابة عن هذا السؤال، حسبت المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية والمتوسط الحسابي المعدل لدرجات طالبات الصف الحادي عشر العلمي على اختبار مخططات البرهان الرياضي في القياسين القبلي والبعدي تبعاً للمجموعة (تجريبية، ضابطة)، وذلك كما يتضح في الجدول (٢):

جدول (٢) المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية والمتوسط الحسابي المعدل لدرجات طالبات الصف الحادي عشر العلمي على اختبار مخططات البرهان الرياضي للقياسين القبلي والبعدي تبعاً للمجموعة (تجريبية، ضابطة)

المجموعة	العدد	القبلي		البعدي		المتوسط الحسابي المعدل	الخطأ المعياري
		*المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	*المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري		
تجريبية	30	7.77	3.645	12.77	5.829	12.533	.571
ضابطة	30	7.33	2.881	7.87	3.203	8.100	.571

*العلامة القصوى= ٢١.

يتضح من الجدول (٢) وجود فروق ظاهرية بين المتوسطات الحسابية والمتوسط الحسابي المعدل لدرجات طالبات الصف الحادي عشر العلمي على اختبار مخططات البرهان الرياضي في القياس البعدي وفقا لطريقة التدريس. وقد تمّ التأكد من تجانس التباين باستخدام اختبار ليفين (Levene's Test of Equality of Error Variances) كأحد شروط تحليل التباين المصاحب والذي أظهر تجانسا في التباين حسب جدول (٣). ولمعرفة فيما إذا كان الفرق الظاهري على القياس البعدي ذا دلالة إحصائية، تم استخدام تحليل التباين الأحادي المصاحب (One way ANCOVA) للقياس البعدي لاختبار مخططات البرهان وفقا لطريقة التدريس (DNR، الاعتيادية)، وفيما يلي عرض لهذه النتائج كما هو مبين في الجدول (٤).

جدول (٣) اختبار ليفين لتجانس التباين

(Levene's Test of Equality of Error Variances)

قيمة F	درجات الحريات البسط	درجات الحريات المقام	الدلالة الإحصائية
1.676	**1**	**58**	**٠.201**

جدول (٤) نتائج تحليل التباين الأحادي المصاحب (One way ANCOVA) للقياس البعدي لدرجات طالبات الصف الحادي عشر العلمي على اختبار مخططات البرهان الرياضي وفقا لطريقة التدريس

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط مجموع المربعات	قيمة ف	مستوى الدلالة	حجم الأثير كوهن(d)
القياس القبلى	727.150	1	727.150	74.588	.000	
طريقة التدريس	293.449	1	293.449	30.101	.000	1.04
الخطأ	555.683	57	9.749			
الكلى	1642.983	59				

يتضح من الجدول (٤) وجود فرق ذي دلالة إحصائية عند مستوى دلالة (α = ٠.٠٥) في درجات طالبات الصف الحادي عشر العلمي على اختبار مخططات البرهان الرياضي وفقاً لطريقة التدريس(قائم علىDNR، الاعتيادية)، ولصالح أداء طالبات المجموعة التجريبية اللواتي تعرضن للتدريس القائم على DNR مقارنة بأداء طالبات المجموعة الضابطة. كما يوضح الجدول (٤) أن قيمة حجم الأثر الذي أحدثته طريقة التدريس، وصل إلى (1.04)، وهو مستوى مرتفع حسب تصنيف كوهن (Cohen, 2011)، الذي أشار إلى أن حجم الأثر يكون مرتفعاً إذا كانت القيمة تساوي (٠.٨٠) فأعلى.

نتائج السؤال الثاني ونصه: ما طبيعة مخططات البرهان الرياضي التي تستخدمها طالبات الصف الحادي عشر العلمي وهل تختلف تبعا لطريقة التدريس؟

للإجابة عن هذا السؤال تم اختبار الفرضية المنبثقة عن هذا السؤال ونصها: "لا تختلف النسب المئوية لمخططات البرهان الرياضي على مستوى كل مهمة والمستخدمة من قبل طالبات الصف الحادي عشر العلمي باختلاف طريقة التدريس"، حيث تم إيجاد التكرارات والنسب المئوية لمخططات البرهان الرياضي التي تم استخدامها من قبل الطالبات حسب المهمة، وتبعاً لطريقة التدريس (DNR، اعتيادية)، كما تم استخدام اختبار كاي^{٢} لبيان اختلاف النسب بين المجموعتين ، ويوضح الجدول(٥) ذلك.

جدول (٥) التكرارات والنسب المئوية واختبار كاي٢ لمخططات البرهان الرياضي المستخدمة من قبل طالبات الصف الحادي عشر موزعة حسب المهمة وطريقة التدريس

المهمة	مخططات البرهان	التكرارات والنسب	المجموعة		المجموع	كاي٢	الدلالة الإحصائية
			تجريبية	ضابطة			
المهمة١: أثبت أن مجموع أي ثلاثة أعداد طبيعية متتالية يساوى ثلاثة أضعاف العدد المتوسط بينهما.	لا مخطط	التكرار	1	1	2	18.333	٠.٠٠٠
		النسبة	3.3%	3.3%	3.3%		
	القناعة	التكرار	7	21	28		

المهمة	مخططات البرهان	التكرارات والنسب	المجموعة تجريبية	المجموعة ضابطة	المجموع	كاي ٢	الدلالة الإحصائية
	الخارجية	النسبة	23.3%	70.0%	46.7%		
	تجريبي	التكرار	8	7	15		
		النسبة	26.7%	23.3%	25.0%		
	استنتاجي	التكرار	14	1	15		
		النسبة	46.7%	3.3%	25.0%		
	المجموع	التكرار	30	30	60		
		النسبة	100.0%	100.0%	100.0%		
المهمة٢ :مثلث ABC متطابق الضلعين فيه AB=AC، $\sin C = \frac{\sqrt{8}}{3}$ فأثبت أن $\frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.	لا مخطط	التكرار	3	6	9	13.722	٠.003
		النسبة	10.0%	20.0%	15.0%		
	القناعة الخارجية	التكرار	5	13	18		
		النسبة	16.7%	43.3%	30.0%		
	تجريبي	التكرار	13	11	24		
		النسبة	43.3%	36.7%	40.0%		
	استنتاجي	التكرار	9	0	9		
		النسبة	30.0%	.0%	15.0%		
	المجموع	التكرار	30	30	60		
		النسبة	100.0%	100.0%	100.0%		
المهمة٣: أثبت مجموع أول n من الأعداد الفردية يساوي مربع عددهن .	لا مخطط	التكرار	2	8	10	13.845	٠.003
		النسبة	6.7%	26.7%	16.7%		
	القناعة الخارجية	التكرار	11	18	29		
		النسبة	36.7%	60.0%	48.3%		
	تجريبي	التكرار	14	4	18		
		النسبة	46.7%	13.3%	30.0%		
	استنتاجي	التكرار	3	0	3		
		النسبة	10.0%	.0%	5.0%		
	المجموع	التكرار	30	30	60		
		النسبة	100.0%	100.0%	100.0%		
المهمة٤: أثبت أن $\log(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots\ldots \times a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots\ldots + \log a_n$	لا مخطط	التكرار	3	3	6	13.833	٠.003
		النسبة	10.0%	10.0%	10.0%		
	القناعة الخارجية	التكرار	11	18	29		
		النسبة	36.7%	60.0%	48.3%		
	تجريبي	التكرار	5	9	14		
		النسبة	16.7%	30.0%	23.3%		
	استنتاجي	التكرار	11	0	11		
		النسبة	36.7%	.0%	18.3%		
	المجموع	التكرار	30	30	60		

المهمة	مخططات البرهان	التكرارات والنسب	المجموعة تجريبية	المجموعة ضابطة	المجموع	كاي ٢	الدلالة الإحصائية
		النسبة	100.0%	100.0%	100.0%		
المهمة٥: أثبت أنه اذا كان x^2 عددا زوجيا فان x عدد زوجى.	لا مخطط	التكرار	5	7	12	15.321	٠.002
		النسبة	16.7%	23.3%	20.0%		
	القناعة الخارجية	التكرار	5	11	16		
		النسبة	16.7%	36.7%	26.7%		
	تجريبي	التكرار	6	11	17		
		النسبة	20.0%	36.7%	28.3%		
	استنتاجي	التكرار	14	1	15		
		النسبة	46.7%	3.3%	25.0%		
	المجموع	التكرار	30	30	60		
		النسبة	100.0%	100.0%	100.0%		
المهمة٦: ذا كان $a^2+b^2=5^2$ حيث a,b أعداد حقيقية، فأثبت أن : (a√3+b√2)^2+(a√2-b√3)^2=125	لا مخطط	التكرار	4	6	10	12.302	٠.006
		النسبة	13.3%	20.0%	16.7%		
	القناعة الخارجية	التكرار	8	18	26		
		النسبة	26.7%	60.0%	43.3%		
	تجريبي	التكرار	8	5	13		
		النسبة	26.7%	16.7%	21.7%		
	استنتاجي	التكرار	10	1	11		
		النسبة	33.3%	3.3%	18.3%		
	المجموع	التكرار	30	30	60		
		النسبة	100.0%	100.0%	100.0%		
المهمة٧: اذا كان الفرق بين مربع العددين k, h يساوي مجموعهما، حيث k, h عددين طبيعيين وكان $k > h$: فأثبت أن الفرق بين هذين العددين يساوي واحد.	لا مخطط	التكرار	7	8	15	6.067	٠.108
		النسبة	23.3%	26.7%	25.0%		
	القناعة الخارجية	التكرار	6	10	16		
		النسبة	20.0%	33.3%	26.7%		
	تجريبي	التكرار	12	12	24		
		النسبة	40.0%	40.0%	40.0%		
	استنتاجي	التكرار	5	0	5		
		النسبة	16.7%	.0%	8.3%		
	المجموع	التكرار	30	30	60		
		النسبة	100.0%	100.0%	100.0%		

يتبين من الجدول (٥) أنّ مخططات البرهان الأكثر استخداما تركزت في المخططات الاستنتاجية والتجريبية لدى طالبات المجموعة التجريبية، بينما تركزت مخططات القناعة الخارجية والمخططات التجريبية لدى طالبات المجموعة الضابطة. كما أظهرت النتائج وجود

اختلاف دال احصائياً في النسب المئوية لمخططات البرهان الرياضي المستخدمة من قبل طالبات الصف الحادي عشر العلمي وجميعها حسب اختبار كاي^{2} لصالح المجموعة التجريبية التي تعرضت لاطار DNR تبعا لطريقة التدريس في المهمات الأولى والثانية والثالثة والرابعة والخامسة والسادسة. اضافة الى عدم وجود اختلاف في النسب المئوية لمخططات البرهان الرياضي المستخدمة من قبل طالبات الصف الحادي عشر علمي على المهمة السابعة تبعا لطريقة التدريس.

مناقشة النتائج والتوصيات:

أسفرت النتائج عن وجود فرق جوهري بين أداء مجموعتي الدراسة على اختبار مخططات البرهان الرياضي، إضافة إلى اختلاف واضح في طبيعة المخططات المستخدمة من قبل المجموعتين، ولصالح المجموعة التجريبية التي تعرضت للتعلم القائم على إطار DNR.

ويمكن تفسير هذه النتائج، بأن التعلم القائم على DNR يتيح للمتعلم الاستخدام الفعّال للمعارف والمعلومات، ومن خلالة يتفاعل الطلبة مع بعضهم البعض ومع المعلم من خلال بيئة طرح الأسئلة والحورات، علاوة على بيئة توفر المزاوجة بين طرق التفكير وطرق الفهم، وتركز على احتياجات الطلبة بكافة أشكالها ، وتتيح للطلبة التعبير عن آرائهم وحججهم والدفاع عنها باسلوب منطقي يركز على التبرير بكافة أشكاله، وهذا ضروري ومهم في بناء وتطوير معرفتهم الرياضية.

وقد تعزى هذه النتائج التي جاءت لصالح المجموعة التجريبية لعدة أسباب، أولها أنّ اطار التدريس القائم على DNRيوفر تمارين ومهمات متنوعة ومختلفة ويمكن حلها بعدة طرق، وعندما يعتاد الطلبة عليها يدركون أن المعرفة الرياضة تتطلب الكثير من الممارسة وذلك لصقل قدرتهم في حل المسائل الرياضية المختلفة، وهذا كلة يتم في بيئة عمل تعاوني جماعي منظم ، يقوم فيه المعلم بالتعزيز المستمر وطرح الأسئلة ، وتحفيز الطلبة على إيجاد حلول متنوعة دون التركيز على حل واحد فقط مما يساعدهم على بناء المفاهيم الرياضية المتعلقة بحل تلك المسائل ، مؤكدا فيها المعلم على الفهم الرياضي، وعدم الاقتصار على تذكر المفاهيم واتباع الإجراءات، وإنما يتعداه إلى إنتاج طرق متنوعة للحل.

كما يمكن تفسير هذه النتائج أنه عندما يعرف المعلمون طرق تفكير طلبتهم وطرق فهمهم الخاصة يمكنهم ذلك من تصميم التعيلم المناسب لطلبتهم، كما أن التركيز على التبرير المتكرر أثناء التدريس يجعل هذا الأمر عادة عند الطلبة وينقل خبراتهم الى موضوعات مختلفة فلا يمارس أي خطوة دون تبريرها، وهذا ينمّي مخططات البرهان الرياضي ويؤسس الى نقل الطلبة

الى براهين أكثر تجريدا، وهذا كله انعكس على فاعلية اطار التدريس في تطوير مخططات البرهان الرياضي.

ان تفوق المجموعة التجريبية في اختبار مخططات البرهان الرياضي في وحدة الاقترانات الأسية واللوغاريتمات على المجموعة الضابطة يؤكد على أن استخدام التعلم القائم على اطار DNR له دور واضح في تنمية مخططات البرهان الرياضي، وذلك من خلال توفير بيئة محفزة على التفاعل والتبرير وتلبية احتياجات الطلبة، فكما أشار هاريل وسوتو (Harel and Soto, 2014) يعد التعلم القائم على الاطار المفاهيمي DNR محفزا على ترسيخ المفاهيم الرياضية ومعززا لعملية تعلم الرياضيات.

وقد اتفقت نتيجة هذه الدراسة مع نتائج الدراسات السابقة (Lailiyah et al., 2023; Harel, 2001) التي أشارت نتائجها إلى وجود أثر للتعلم وفق إطار DNR في تحسين قدرة الطلبة على تعلم الرياضيات وتطوير مهاراتهم.

التوصيات:

في ضوء النتائج، تقدم الدراسة التوصيات الآتية:

- إجراء المزيد من الدراسات التي تتناول فاعلية إطار التدريس القائم على DNR في تدريس موضوعات مختلفة في الرياضيات، وباستخدام متغيرات تابعة جديدة، ومراحل تعليمية مختلفة.
- اثراء المناهج الدراسية بأنشطة التعلم القائم على DNRوفي مواضيع رياضية متنوعة.
- تعريض معلمي الرياضيات لدورات تدريبة تتضمن مفهوم التعلم القائم على DNR.
- تبني معلمي الرياضيات التعلم القائم على DNR داخل الغرفة الصفية وفي موضوعات رياضية متنوعة.

المراجع

خصاونة، أمل. (٢٠٠٩). مفهوم البرهان الرياضي لدى معلمي الرياضيات ومقدرتهم في الحكم على صدقه وبنائه. *دراسات العلوم التربوية الجامعة الأردنية*، ٣٩، ١٣٦–١٥٨.

عودة، أحمد. (٢٠١٠). *القياس والتقويم في العملية التدريسية*. اربد، الأردن، دار الأمل للنشر والتوزيع.

وزارة التربية والتعليم. (٢٠١٨) . *الميثاق الوطني لمهنة التعليم، الجزء الأول*. ادارة الاشراف والتدريب التربوي، وزارة التربية والتعليم، عمان، الأردن.

المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية. (٢٠٢١). *التقرير الوطني عن الدراسة الدولية للرياضيات والعلوم للعام٢٠١٧ "TIMSS 2015"*، عمان، الأردن.

Aberdein, A. (2019). Evidence, proofs, and derivations. *ZDM – Mathematics Education*, *51*(5), 825–834.

Almeida.D. (2000). A survey of mathematics undergraduate's interaction proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890.

Akkurt, Y. Y., & Durmuş, S. (2022). Tracing proof schemes: some patterns and new perspectives. *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, *7*(1), 1–16.

Bakar, M. T., Suryadi, D., & Darhim, D. (2019). The different way of understanding and way of thinking between gender on the problem the linear equations of two variables. *Journal of Physics: Conference Series*, *1280*(4), 042035.

Cihan, F., & Akkoç, H. (2019). Developing Pre-service Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge of proof Schemes: an intervention study. *HAL (Le Centre Pour La Communication Scientifique Directe)*.

Cihan, F., & Akkoç, H. (2023). An Intervention Study for Improving Pre- service Mathematics Teachers' Proof Schemes. *Mathematics Teaching Research Journal*, 15(2).

Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*. 5th Edition, Routledge Falmer, London.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In *Springer eBooks* (pp. 25–41).

Fonger, N. L., Ellis, A. B., & Doğan, M. F. (2020). A quadratic growth learning trajectory. □*the* □*Journal of Mathematical Behavior/˜the œJournal of Mathematical Behavior*, *59*, 100795.

Güler, G. (2016). The Difficulties experienced in teaching proof to prospective mathematics Teachers: Academician views. *Higher Education Studies*, *6*(1), 145.

Hanna, G., & De Villiers, M. (2012). Proof and proving in mathematics education. *In New ICMI studies series*.

Hanna, G., & Mason, J. (2016). Key ideas and memorability in proof. In *Princeton University Press eBooks* (pp. 167–180). https://doi.org/10.2307/j.ctvc778jw.19

Hamdani, D., Junaidi, J., Novitasari, D., Salsabila, N. H., & Tyaningsih, R. Y. (2020). Proving Evidence and Explanatory Evidence in the Mathematics Classroom. *Journal of Educational Research and Studies*, *4*(2), 248.

Hamdani, D., Subarinah, S., Triutami, T. W., Arjudin, & Sripatmi. (2021). Construction scheme of proof based on assimilation and accommodation processes: Theorem of Number Theory. *Journal of Physics: Conference Series*, *1776*(1), 012004.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR-based instruction. Learning and Teaching Number Theory, *Journal of Mathematical Behavior*, 2, 185,212.

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, focus on proving, Part I. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40(2),* 487-500.

Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM (Berlin. Print)*, *40*(5), 893–907.

Harel,G. (2010). DNR-Based Instruction in Mathematics as a conceptual Framework. *Theories of Mathematics Education, 5(4),* 341-366.

Harel, G. (2013). DNR-Based Curricula: the case of complex numbers. *Journal of Humanistic Mathematics*, *3*(2), 2–61.

Harel, G. Fuller, E. Soto, O. (2014). DNR-Based Instruction in Mathematics: Determinants of a DNR Expert's Teaching. *Transforming Mathematics Instruction Multiple Approaches and Practices. 6(5)*, 413-438.

Harel, G. (2020). The DNR system as a conceptual framework for curriculum development and instruction. In *Routledge eBooks* (pp. 263–280).

Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 709–721.

Harel, G., Fuller, E., & Soto, O. D. (2014). DNR-Based instruction in Mathematics: Determinants of a DNR Expert's teaching. In *Advances in mathematics education* (pp. 413–437).

Harel,G., Rabin, M . (2010).Teaching practices Associated With the Authoritative Proof Scheme. *Journal for Research in Mathematics Education,* 41(1), 14-19.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubisnky (Eds.), *Issues in mathematics education (*Research incollegiate mathematics education III, Vol. 7, pp. 234–283). Providence: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.),*Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Charlotte: NCTM/Information Age Publishing.

Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-Explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 62–101.

Hamdani, D., Subarinah, S., Triutami, T. W., Arjudin, & Sripatmi. (2021). Construction scheme of proof based on assimilation and accommodation processes: Theorem of Number Theory. *Journal of Physics: Conference Series*, *1776*(1), 012004

Jankvist, U. T., & Misfeldt, M. (2019). CAS assisted proofs in upper secondary school mathematics textbooks. *REDIMAT*, *8*(3), 232.

Kanellos, I., Nardi, E., & Biza, I. (2018). Proof schemes combined: mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(4), 277–294.

Kilicaslan, E. A. (2023). An investigation on the thinking structures and proof-writing levels of future mathematics teachers. *Pedagogical Research, 8*(4), em0172.

Lailiyah, S., Kurlillah, N. F. A., & Kusaeri, N. (2023b). Student's ways of thinking and ways of understanding analysis in solving mathematics problems in term of adversity quotient. *Beta, 16*(2).

Lee, K.(2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disproving of propositions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 26-44.

Leech, N., Barrett, K. & Morgan, G. (2011*). SPSS for intermediate statistics: Use and interpretation (4th Edition)*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers.

National Council of Teachers at Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school Mathematic*. Reston, VA: NCTM.

Oflaz, G., Polat, K., Ozgul, D. A., Alcaide, M., & Carrillo, J. (2019). A comparative research on proving: the case of prospective mathematics teachers. *Higher Education Studies, 9*(4), 92.

Osypov, A. (2023). Kant: on the Way to Understanding the Spiritual Nature of Man. *Anthropological Measurements of Philosophical Research, 24*, 118–134.

Ozturk, T., & Guven, B. (2022). A study on pre-service mathematics teachers' criteria of proof evaluation. *LUMAT, 10*(1).

Rahmawati, D. R., Rahmawati, D. R., Fuad, Y., & Rahaju, E. B. (2019). Students' Proof Scheme for Mathematical Proving and Disproving of Divisibility Proposition. *Advances in Computer Science Research, Volume 95*.

Sears, R. (2018). Proof schemes of pre-service middle and secondary mathematics teachers. *Investigations in Mathematics Learning, 10(8), 1-18*.

Sriraman.B, VanSpronsen.H, Haverhals.N.(2010).Commentary on DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. *Theories of Mathematics Education, 5(4),* 341-366Tall, D. (1995). Advanced Mathematical Thinking. *The Mathematical Gazette*, *79*(484), 159.

Tabach, M., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., & Levenson, E. (2010). Verbal Justification-is it a Proof? Secondary School Teachers' Perceptions. *International Journal of Science and Mathematical Education/International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*(6), 1071–1090.

Ursavaş, N., & Çimer, S. O. (2015). A new approach in biology teaching: DNR-based teaching. *Digipak (Istanbul University)*.

Ursavaş, N., & Çimer, S. O. (2020). The Effect of DNR Based Instruction on the Development of Ways of Understandings about Digestion and Digestive System. *YYU Journal of Education Faculty*, *17*(1), 1356–1390.

Weber, E., & Lockwood, E. (2014). The duality between ways of thinking and ways of understanding: Implications for learning trajectories in mathematics education. *˜the œ Journal of Mathematical Behavior, 35*, 44–57.