

أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات
في ضوء نموذج بييري - كيرين لدى تلامذة الصف السابع

إعداد

أ/ ميسون "محمد خير" محمود عبابنة

طالبة دكتوراه- جامعة اليرموك- الأردن

أ.د/ أمل عبد الله خصاونة

مناهج الرياضيات وأساليب تدريسها

قسم المناهج وطرق التدريس - كلية التربية - جامعة اليرموك

أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات في ضوء نموذج بييري - كيرين لدى تلامذة الصف السابع

أ/ ميسون "محمد خير" محمود عبابنة و أ.د/ أمل عبد الله خصاونة*

مستخلص البحث:

هدفت الدراسة إلى الكشف عن أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات لدى تلامذة الصف السابع الأساسي. تكونت عينة الدراسة من (٤٠) تلميذة وزعن على مجموعتين تكونت كل مجموعة من (٢٠) تلميذة. ولتحقيق أهداف الدراسة، تم إعادة بناء وحدة التحويلات الهندسية في ضوء إطار للنمذجة الرياضية، إضافةً إلى إعداد اختبار مكون من مجموعة من المهمات التي تقيس الفهم حسب نموذج بييري - كيرين لدى تلامذة الصف السابع، واستخدم المنهج شبه التجريبي بتصميم قبلي- بعدي لمجموعتين، إحداهما تجريبية والأخرى ضابطة. أظهرت نتائج الدراسة وجود فرق جوهري في أداء تلامذة الصف السابع على اختبار الفهم الرياضي وفقاً لطريقة التدريس (النمذجة الرياضية، الاعتيادية) وبحجم أثر كبير، وكان الفرق لصالح الذين تعرضوا للنمذجة الرياضية مقارنة بأفراد الطريقة الاعتيادية. كما أسفرت النتائج عن وجود أثر للنمذجة الرياضية في مستويات الفهم المفاهيمي لدى التلامذة؛ إذ تركزت مستويات الفهم المفاهيمي للمجموعة التجريبية في المستويات: امتلاك الصورة، وملاحظة الخصائص، والطابع الرسمي، والهيكل أو البناء، بينما تركزت للمجموعة الضابطة في المستويات المعرفة الأولية، وبناء الصورة، وامتلاك الصورة، وملاحظة الخصائص. وفي ضوء النتائج، تم تقديم مجموعة من التوصيات.

الكلمات المفتاحية: النمذجة الرياضية، نموذج بييري - كيرين، مستويات الفهم الرياضي.

* أ/ ميسون "محمد خير" محمود عبابنة: طالبة دكتوراه- جامعة اليرموك- الأردن.

أ.د/ أمل عبد الله خصاونة: مناهج الرياضيات وأساليب تدريسها- قسم المناهج وطرق التدريس - كلية التربية - جامعة اليرموك.

The Effect of Mathematical Modeling in Developing Conceptual Understanding among Seventh Grade Students

Abstract

The study investigated the effect of the mathematical modeling in developing understanding levels among seventh grade students in light of Pirie & Kieren model. The sample of the study totaled (40) seventh grade female students distributed into two groups (experimental and conventional), each consisting of (20) female students. To achieve the objectives of the study, the geometric transformation module was reconstructed according to a mathematical modeling framework, and a test of seven tasks were prepared that measure understanding levels regarding Pirie- Kieren model among seventh grade female students. Qusai experimental approach with pre-posttest with two groups design was used. The results revealed significant difference between the arithmetic means of the experimental and the control groups of their performance on the tasks measured by Pirie-Kieren levels of mathematics understanding. Moreover, the understanding levels of the experimental group were concentrated on four external levels of Pirie-Kieren, property noticing, formalizing, observing and structuring, whereas the understanding levels of the control group were concentrated on the internal levels, primitive knowing, image making, image having and property noticing. In light of the results some recommendations were suggested.

Key Words: Mathematical Modeling, Pirie-Kieren Model, mathematical understanding Levels.

المقدمة:

تتنامى العلوم من حولنا، لتواكب التطورات الحديثة في كافة مجالات الحياة، وبخاصة في مجال التعليم. ومن هنا لابد من وقفة تأملية في تفاصيل تلك التطورات وسرعتها التي كانت السبب وراء اتخاذ القرار بأنه حان الوقت لتغيير جذري في كيفية التعامل مع الأفكار، والمعطيات، والمشكلات، والطرق التقليدية ذات الحل الوحيد. ونظراً للدور الذي يلعبه علم الرياضيات في تلك التطورات، كان لابد من مواكبة التطور العلمي، من خلال إضفاء طابع الحيوية والمرونة والتجدد في تعلم وتعليم الرياضيات، كونها من المواد الأساسية في أي مرحلة دراسية، لما تحتويه من مفاهيم ومصطلحات، ومعرفة علائقية، وأفكار تساعد في بناء معرفة مفاهيمية لحل المشكلات الحياتية بشكل واع (Sahin, Yenmez & Erbas, 2015).

وهذا ما أكد عليه ستيفنسون (Stevenson, 2020) بأن تنمية مهارات التلامذة في مادة الرياضيات تكمن في اتباع المعلمين لاستراتيجيات التفكير العليا، مما يساعدهم على تنمية قدرتهم على التحليل والتنبؤ، والثقة بالنفس، والقدرة على اتخاذ القرارات، والتعامل مع المشكلات الرياضية والحياتية التي تواجههم. واستناداً إلى ما سبق، هناك تنامياً في الحاجة إلى منح التلامذة فرصة بناء فهمهم وبخاصة الفهم المفاهيمي، وأن يكونوا مسؤولين عن تعلمهم، وجعله واقعياً ذا معنى، من خلال جعل صورة الرياضيات أكثر اكتمالاً، وأنها ليست مجموعة من الإجراءات والخوارزميات التي ليس لها صلة بالواقع، بل إنها علم مثير للاهتمام والإبداع، بعيداً عن التفكير الخطي. وفي ظل التنافس العالمي في أداء التلامذة في الرياضيات، ومن خلال الاطلاع على تقارير الاختبارات الدولية بيزا (PISA) (المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية، 2020) يظهر الضعف جلياً في كيفية التعامل مع المهمات الحياتية، ويتمثل هذا الضعف في جوانب عدة منها: فهم المهمة وتحديد معطياتها، والقدرة على وضع خطة للحل، وتحويل المهمة إلى نموذج رياضي قابل للحل، وإخضاع هذا الحل للتحليل والتقييم، وغيرها من العمليات الذهنية المعقدة، إذ إن هذه المهمات الحياتية تحتاج إلى عملية مركبة تسمى النمذجة الرياضية.

تطرق العديد من الباحثين لماهية النمذجة الرياضية، فقد عرّفها أرسفن (Arseven, 2015) بأن النمذجة الرياضية ما هي إلا تطبيق لخوارزمية الرياضيات للحصول على نموذج يساعد الفرد على التحليل واتخاذ القرار، من خلال مجموعة من الخطوات تبدأ بالمشكلة وفهمها، ومن ثم اختيار المتغيرات التي تصف المعطيات، وتوضح العلاقات فيما بينها لتكوين الصورة الذهنية لدى التلامذة. ويعرّفها لسوادي وكاسوما ودرويش وأفغاني (Laswadi, Kusumah, 2016) بأنها العملية التي يتم من خلالها تحويل المواقف أو الظواهر

الحياتية إلى مهمات رياضية، ثم يتم حلها والخروج بالتوقعات والتعميمات ومفاهيم جديدة في الرياضيات.

وأكد جوانتي وهارتونو (Juanti & Hartono, 2019) أن النمذجة الرياضية هي أحد الاستراتيجيات المتبعة لتحسين مستوى التلامذة في مادة الرياضيات من خلال تحويل الموقف والمشكلة الحياتية إلى مهمة رياضية باستخدام نموذج رياضي والتعامل معه وحله، وتفسير النتائج المتحققة، والتأكد من صحة التفسير رياضياً. وفي ذات السياق، يشير جونق وستير وهي (Jung, Stehr & He, 2019) إلى أن النمذجة الرياضية تتمثل بعملية يتم من خلالها تمثيل المواقف والمفاهيم والأفكار الرياضية من خلال التعبير عنها عبر شكل أو ترميز أو قانون معين، والتي تساعد على فهم الرياضيات وتفسير نتائجها بصورة كمية ونوعية.

وتمثل النمذجة الرياضية الجسر الذي يربط الرياضيات بالحياة الواقعية، حيث يتم دراسة مشاكل العالم الحقيقية مثل التلوث، والسكان، والبيئة، والأمراض من خلال النمذجة الرياضية، كما تعمل النمذجة الرياضية على محو الأمية الرياضية، والتي تعنى بمعرفة المفاهيم الأساسية، وامتلاك الكفاءة مع المهارات الأساسية والإجراءات، وتركز على تقديم مادة الرياضيات بشكل أفضل من خلال التقنيات والاستراتيجيات المتنوعة (Saxena, Shrivasta & Bhardwaj, 2016). وفي السياق ذاته، يشير أسمابا (Asempapa, 2018) بأن النمذجة الرياضية ترتبط بالعديد من المواقف في الحياة الحقيقية، وصياغة فرضيات معينة، واستخدام النموذج الرياضي للحصول على صيغة رياضية، ومن ثم تطبيق تقنيات رياضية، للحصول على نتائج معقولة للموقف الحياتي. وعليه، تتطلب النمذجة الرياضية ممارسات رياضية وعمليات متعددة، ومتطلبات إدراكية عليا، والقدرة على التواصل بشكل فعال، واستخدام المعرفة السابقة، وعملية اختبار وإعادة صياغة الحل ليتناسب مع السياق الحياتي.

ويؤكد دوندار وجوكورت وسويلو (Dundar, Gokkurt & Soylu, 2012) على اختلاف النمذجة الرياضية عن النموذج الرياضي، فالنموذج الرياضي هو حصيلة أو نتيجة عملية النمذجة، بينما يرى بأن النمذجة هي عملية تطوير للنموذج الرياضي. ويعني النموذج بالنسبة إليهم بأنه تمثيل للواقع أو الظاهرة التي تنتمي لسياق حياتي بمجموعة من الرموز ذات المعنى والتي تبسّط ذلك الواقع. ويشير بلوم ونيس (Blum & Niss, 1991) المشار إليه في بيكيك وبيرجيك وكيريك (Bikic, Burgic, & kurtic, 2021) إلى الفرق بين المهمات الرياضية البحتة والمهمات التطبيقية التي تصلح لنشاط النمذجة الرياضية، فالأولى تعود إلى

حوادث في عالم الرياضيات تتضمن خصائص، وعمليات، ونظريات ورموز، بينما تربط الثانية بين الرياضيات والعالم الحقيقي وتتضمن مهمات سياقية ونماذج رياضية.

وذكر الياسين وخصاونة (2018) بأن أهمية النمذجة الرياضية تتمثل في أنها تركز على مشكلة واقعية بحاجة إلى حل يتطلب استخدام التعبيرات والمعالجات الرياضية، وبالتالي التوصل إلى الحل الواقعي للمشكلة المطروحة، وتفسير الحل بالعودة إلى الموقف الأصلي، مما يعمل على تنمية مهارات التفكير لدى التلامذة، وانتقال أثر تعلم نمط تفكيري معين. ويرى الخطيب (2017) أن النمذجة الرياضية تعزز من مستوى الإبداع لدى التلامذة، والإيعاز بتطبيق الرياضيات في سياقات حياتية متنوعة، إذ تساعد في فهم واستيعاب المفاهيم الرياضية، مما يدعم عملية تكوين صورة متوازنة للرياضيات في مخيلة المتعلم، ويثري العملية التعليمية للرياضيات بجعلها ذات معنى للتلامذة، مما يؤدي إلى تقليص الفجوة بين النظرية والتطبيق ويزيد ثقة المتعلم بنفسه ويجعله يستمتع بالرياضيات ويقربها إليه.

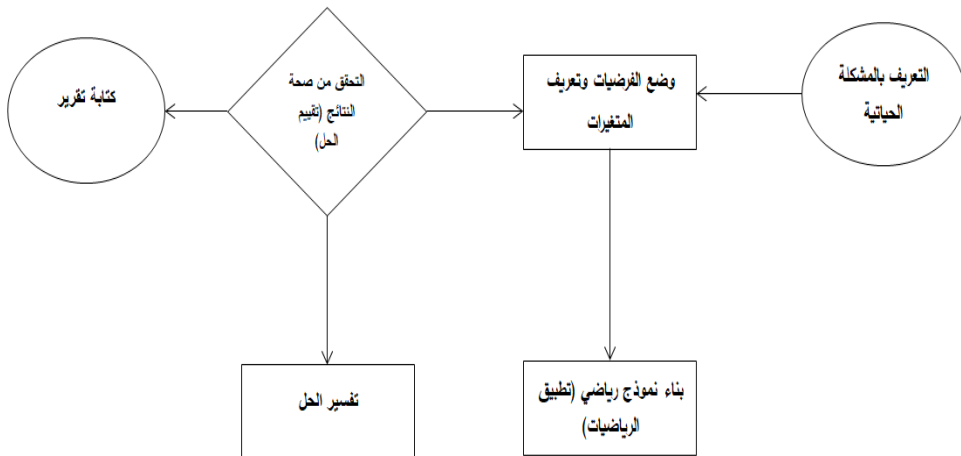
وعليه، يحتاج التلامذة إلى إدراك ماهية النماذج الرياضية، وأهميتها في تنمية المعارف والخبرات الرياضية، مما يسهم في توليد مجموعة من الأفكار الجديدة التي تجمع بين الجانب الحسي والمجرد، مما يثري حب الاستطلاع والقدرة على التخيل والتي تعد أساسية لنمو المعرفة الرياضية (Zulkarnaen, 2021). وركز بورا وأحمد (Bora & Ahmed, 2019) أن من مميزات استخدام النمذجة الرياضية في تدريس الرياضيات، إتاحة المجال والحرية للتلامذة في التعبير عن مستوى فهمهم للموقف الرياضي، وتقبل وقوعهم في الخطأ بهدف الاستفادة والتعلم لأنها تعتمد على أن يطبقوا ما يمتلكونه من النماذج السابقة التي قد تعد خاطئة، وعند التطبيق فإنهم يكتشفون تلك الجوانب ويقومون بتقويمها من خلال التغذية الراجعة حول الإجراءات الخاصة بالنمذجة الرياضية، وهو ما ينعكس بشكل إيجابي على تحصيلهم الأكاديمي وعلى مستوى الجودة في التعليم.

وبناءً على ما سبق، فإن أهمية النمذجة الرياضية تتمثل في تنمية القدرة على ترتيب الأفكار وتنظيم العمليات العقلية التي تُساعد التلامذة على التعريف بالمشكلة الحياتية، وتحديد الأبعاد المرتبطة بها، وبناء نماذج رياضية متنوعة تتلاءم مع فرضيات المشكلة الحياتية، ومن ثم تطبيق الحلول والنظريات على أرض الواقع، وهو ما يعزز لديهم القدرة على الفهم والتفكير الذي يتميز بالمرونة والطلاقة، ويحفز تعلم الرياضيات، وينمي الإبداع والابتكار.

واختلف الباحثون في كيفية وصف مراحل النمذجة الرياضية، فمنهم من حددها بأربع مراحل، والبعض الآخر تجاوز هذا العدد في وصف مراحل النمذجة الرياضية بحيث وصلت إلى ست أو سبع مراحل. حيث وصف ليش وزاوجيوسكي (Lesh & Zawojewski, 2007)

عملية النمذجة الرياضية بأنها تتكون من أربع خطوات تمثل عمليات متفاعلة، ليس بالضرورة أن تشير إلى ترتيب محددّ وأنها ليست خطية، فعملية الوصف تمثل تكوين نموذج رياضي يمثل الانتقال من العالم الحقيقي إلى نموذج الرياضيات، ومن ثم إلى المعالجة التي تؤدي إلى التنبؤ بالحل، ومن ثم التحقق من صلاحية التنبؤ من خلال التحقق من الحل، وذلك من خلال الاختبار والمراجعة والتعديل للحل بالعودة إلى العالم الحقيقي.

ويستند الحموري ودوركي وفولي (Alhammouri, Durkee & Foley, 2017) في دراسة لهم على إطار للنمذجة الرياضية وُضِع من قبل مجلس المعايير المشتركة لممارسة الرياضيات في الولايات المتحدة (CCSSM, 2010)، دورة النمذجة الرياضية: تعريف المشكلة الحياتية وتفسيرها وتحديد متغيراتها، وصياغة نموذج إما جبرياً أو هندسياً أو إحصائياً أو من خلال الرسومات، وإيجاد الحل، ومن ثم تفسير الحل ضمن موقف المشكلة أو الموقف الحياتي، وتصديق الحل والنموذج، وكتابة التقرير. والشكل التالي يبين هذا الإطار.



شكل (١): إطار النمذجة الرياضية من قبل منظمة المعايير المشتركة للرياضيات (CCSSM, 2010;72)

وأشار هيرنانديز وليفاي وفيلتون-كوستلر وزبيك (Hernandez, Levy, Felton-) و Koestler & Zbiek, 2017) إلى أن عملية النمذجة تتمثل في الآتي: **التعريف بالمشكلة الحياتية:** وتتضمن التعريف بالمهمة الحياتية، فمن الممكن أن تكون المهمة واسعة ومعقدة، لذلك ينبغي تنقيح الفكرة المفاهيمية إلى مشكلة موجزة البين؛ **وضع الفرضيات وتعريف**

المتغيرات: تتضمن عملية اختيار وتحديد المعطيات التي تكون ضمن المهمة الحياتية وتعريف المتغيرات، وتوضيح العلاقات فيما بينها، حينها يتم فصل وتحديد ماهية المعطيات المهمة وتجاهل المعطيات غير المهمة؛ **بناء نموذج رياضي (تطبيق الرياضيات):** يتم ترجمة الفرضيات والعلاقات فيما بينها لصيغة رياضية، حيث تكوّن هذه الصيغة الرياضية ما يسمى بالنموذج الرياضي، ويتم استخدام الرياضيات بمختلف ميادينها سواء كان اقتنانات، حل معادلة، استخدام برامج حسابية، وغيرها، من أجل الحصول على نتيجة؛ **تفسير الحل:** التفكير في معالجة المهمة، والتأكد من كون الحل منطقياً ومقبولاً عند العودة للمهمة الحياتية الأصلية؛ **التحقق من صحة النتائج (تقييم الحل):** هي مرحلة مراجعة وتحليل النتائج لتقييم جودة النموذج الرياضي، وماهية نقاط القوة والضعف للنموذج، وهل هناك حالات معينة لا يعمل بها النموذج، مدى حساسية النموذج في حالة تغيير الفرضيات، وهل يوجد مجال للتحسين؟ ويتم إعادة العملية في حال لزم الأمر لفصل النموذج الرياضي؛ **كتابة تقرير:** تتمثل في عرض النتائج التي تم الحصول عليها بالنسبة للمهمة الحياتية، وبيان آلية التنفيذ.

من خلال ما سبق، فإنّ النمذجة الرياضية تتضمن عدداً من المراحل التي تبدأ من تحديد المهمة الحياتية، وصياغتها، ووضع الفرضيات المرتبطة بها، وتطبيق المعادلات والنظريات الرياضية، وتقييم النتيجة للتأكد من صحة الحل، ومن ثمّ تفسيره وتطبيقه في المواقف الحياتية المشابهة. وبما أنّ الهدف الأساسي من التعليم هو إعداد التلامذة للتعامل مع مادة الرياضيات في مختلف المراحل الدراسية من خلال التأكد من امتلاكهم القدرة على فهم المفاهيم المرتبطة بها، وقدرتهم على تفسير الظواهر والمهمات الحياتية المختلفة وحلها، وتطبيقها في الحياة الواقعية، فإن استخدام النمذجة الرياضية تعدّ من الوسائل التي قد تعزز تعلم الرياضيات وتطبيقها في حياتهم اليومية، إلى جانب تعزيز الفهم في الرياضيات.

ويعتقد بيرى-كيرين (Pirie & Kieren, 1994) بأنّ العملية الداخلية للفهم تتصف بالشمولية؛ أي تتعدى الرياضيات إلى علوم أخرى، إضافة إلى تعقيد تلك العملية وترابطها، وتبنيًا نظرية في الفهم الرياضي تتصف بأنّ الفهم في الرياضيات هي عملية تطور و نمو متكررة ودورية (Transcedent recursion)، ويشيران إلى عدة خصائص لعملية تطور الفهم بالإضافة إلى ما سبق، وهي: الديناميكية؛ أي إنّ الرياضيات عملية تكاملية و تتضمن إعادة تنظيم المعرفة، وهرمية؛ بمعنى يوجد عدة مستويات للفهم، و غير خطية؛ أي إنّ الفهم ينمو بمستويات مختلفة، و دوري متكرر، وعملية سيكولوجية داخلية.

وقد تعددت التعريفات ومستويات التطور للفهم في الرياضيات، فيرى جنك وايرباس (Genc & Erbas, 2019) بأنه قدرة التلامذة على فهم ما يتم طرحه من أفكار واستدلالات

تمكنهم من التعامل مع المشكلات الرياضية وحلها، والتأكد من قدرتهم على التفسير والتبرير للنتائج المتحققة. وأضاف مولتسوا وتونجيرا وتشيجونا (Mlotshwa, Tunjera & Chigona, 2020) تعريفاً له بأنه العملية التي تساعد الطلبة على التفكير العلمي من خلال امتلاكهم القدرة على استخدام المعرفة العلمية في توضيح المفاهيم المرتبطة بالموقف الرياضي، وتفسيرها، وتطبيقها في المواقف الجديدة. وعرفه الرفاعي وخصاونة والبركات (2021) على أنه المقدرة على تمثيل الأفكار الرياضية بصور مختلفة ومتعددة مع الربط فيما بين تلك التمثيلات، إضافة الى عمليتي الربط الداخلي في الرياضيات، والربط الخارجي الذي يتمثل بتطبيق المعرفة الرياضية في حل مهمات حياتية.

وعليه تتمثل أهمية الفهم المفاهيمي في الرياضيات بحسب ما أشار إليه سوارسانا وبيدياسيه وسوبارتا (Suarsana, Widiasih & Suparta, 2018) أنه يساعد التلامذة على الحصول على المعارف والمعلومات المرتبطة بالرياضيات من خلال مجموعة من الأنشطة التعليمية التي تنمي من عملياتهم الذهنية التي تساعدهم على اكتساب مهارات الرياضيات المختلفة وإدراك الروابط والعلاقات المختلفة بين المتغيرات، وتنمية قدرتهم على الفهم الصحيح للمفاهيم، كما يسهم في بناء الأطر المعرفية للتلامذة بحيث يصبحون أكثر قدرة على فهم محتوى مادة الرياضيات، وتنمية البنى المعرفية لديهم، وبناء المعارف والخبرات الجديدة بالاستناد إلى معارفهم وخبراتهم السابقة. وقد أكد على ما سبق ساذرلاند، وفابريستون دويلر وكلاارك (Sutherland, Firestone Doabler & Clarke, 2020) حيث إن الفهم المفاهيمي يسهم في بناء المعرفة من خلال دورها في تعليم التلامذة للمبادئ والمهارات المتعلقة بالموقف الرياضي، إلى جانب التأكد من ترسيخ المعلومات والخبرات الجديدة في أذهانهم، وانتقال أثرها إلى المواقف الرياضية الجديدة، وبالتالي، فإن الهدف من تنمية الفهم المفاهيمي لدى التلامذة يعدّ من الجوانب الأساسية في التعليم والتعلم.

مما سبق، تتمثل أهمية الفهم في الرياضيات في دوره في تحفيز التلامذة على المشاركة في العملية التعليمية التعلمية من خلال المشاركة في أفكارهم، وبيان الخطوات التي يستخدمونها والإشارة إلى المفاهيم والإجراءات المرتبطة بالموقف الرياضي، وهو ما يساعدهم على فهم الرياضيات بشكل أكثر عمقاً ووضوحاً، كما أن إتاحة الفرصة لهم لمشاركة أفكارهم تساعد على ترابط معلوماتهم وتنمية قدرتهم على التحليل والنقد والتفسير، وهو ما يساعدهم على تصحيح المفاهيم الخاطئة ومن قدرتهم على بيان الخطوات اللازمة للتعامل معها.

وتعرّف عبد الملك (2019، ص 541) نموذج بييري-كيرين بأنه: "نموذج لتحليل النمو في الفهم لدى تلامذة معينين في موضوع محدد خلال عدد من المستويات يتحرك خلالها التلميذ ذهاباً وإياباً أثناء قيامه ببناء فهمه الرياضي". كما يعرفه يو ومانوشيهري (Yao & Manouchehri, 2020) بأنه من النماذج الرياضية التي تسعى إلى تنمية مستوى الفهم المفاهيمي في الرياضيات من خلال عدد من المراحل التي ينتقل بينها التلامذة للتمكن من اكتساب المهارات وتنمية المعارف الرياضية لديهم.

ويستند نموذج بييري-كيرين (Pirie-Kieren) على نظرية مفادها أن تطور الفهم الرياضي لدى المتعلمين يمر بمراحل مختلفة، وأن الفهم عملية تتطلب وقتاً للنمو والتطور، وأن اكتسابه يتطلب التعليم المستمر والتنظيم المتسق أثناء هذه العملية؛ وأن نمو الفهم لدى المتعلم يعتمد على نمو البنى المعرفية لديهم وتطورها خلال المستويات التعليمية المختلفة. ويؤكد كل من بييري (Pirie) وكيرين (Kieren) أن أساس هذه النظرية هو التفسير البنائي لعملية الفهم التي أشار إليها فون غلاسيرفيلد (Von Glasersfeld, 1983) في أنّ ما يحدد قيمة الأبنية المفاهيمية هي كفايتها التجريبية، وإمكانية تطبيقها على أرض الواقع، ومدى مطابقتها مع الخبرات الحياتية، واستمراريتها كوسيلة لحل المهام الرياضية والمشكلات الرياضية التي تتطلب التنظيم المتسق لما يطلق عليه الفهم المفاهيمي.

وتم تصميم نموذج بييري-كيرين (Pirie-Kieren) لدراسة مدى تغير وتطور الأفكار الرياضية لدى التلامذة. ويقدم هذا النموذج إطاراً نظرياً وعملياً من أجل وضع خطط واضحة حول أداء التلامذة في الرياضيات ضمن العديد من سياقات التعلم ومتابعة انتقالهم عبر مراحل النموذج الثمانية المختلفة، والتي تعبر عن فهم التلامذة لمختلف المفاهيم الرياضية المقدمة في حصص الرياضيات (Pirie & Kieren, 1994). وبناءً على ما سبق، إنّ نموذج بييري-كيرين (Pirie-Kieren) يعدّ من النماذج التي توفر إطاراً لتقييم ووصف التطور المستمر لما يمتلكه التلامذة من معرفة وخبرات في البنى المعرفية لديهم. ويقسم نموذج بييري-كيرين (Pirie-Kieren) إلى مجموعة من المستويات، والتي صنفها على أنها مستويات داخلية وخارجية. وتتضمن المستويات الداخلية المستويات الأربع الأولى، أما المستويات المتبقية فقد صنفت على أنها مستويات خارجية، وهي كالاتي (Yao, 2020):

- معرفة أولية (بدائية) (Primitive Knowledge): المستوى الأول لعملية الفهم، في هذا المستوى لا يعني مستوى فهم رياضي متدني، ولكنه يعني بأنه نقطة البداية أو الانطلاق لعملية الفهم، والتي تتعلق بالمحصلة المعرفية.

أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات
في ضوء نموذج بيرى-كيرين لدى تلامذة الصف السابع

- **بناء الصورة (Image Making):** وهو المستوى الذي يكون فيه التلامذة مخططات تساعد على تكوين الصور الجديدة أو تنقيح الصور بناءً على ما يمتلكونه من معارف ومهارات وكفايات في المرحلة السابقة.
 - **امتلاك الصورة (Image Having):** ويتم في هذه المرحلة استبدال الأنشطة بصورة ذهنية حول المفهوم المتعلق بالموقف الرياضي من خلال تخيله لإنتاج الصورة الخاصة به، وذلك دون إجراء أي نشاط عملي.
 - **ملاحظة الخصائص (Property Noticing):** وتتعلق بامتلاك التلامذة القدرة على بناء الخصائص المتعلقة بالمفهوم أو الموقف الرياضي، أي إدراك المفهوم وخصائصه، وملاحظة الفروق والروابط والتركييب بين الصور الذهنية المتعددة.
 - **إضفاء طابع رسمي (Formalizing):** يقوم التلامذة بالاستفادة من المعطيات المتاحة لديهم باستخلاص الخصائص المشتركة وتعميم تلك الخصائص على المواقف الجديدة والمشابهة للمواقف التي تعلمها التلامذة، أو فهمهم لأساليب رياضية معينة من خلال ما يمتلكونه من أفكار رياضية سابقة، وتحويل ما اكتسبوه التلامذة في المرحلة السابقة إلى تعريفات رسمية. الملاحظة (Observing): يتم في هذه المرحلة ظهور امتلاك التلامذة للقدرة على بناء وتنظيم العمليات المرتبطة بالتفكير، والتعرف على تداعيات عمليات التفكير.
 - **البناء (Structuring):** يمثل هذا المستوى امتلاك التلامذة للوعي بالكيفية التي يتم من خلالها ربط عدد من النظريات ببعضها، وتحليلها وتفسيرها، وبناء براهين بالاعتماد على محاكمات منطقية أو بناء حلول للمهمات.
 - **الابتكارية (Inventising):** وهي العمل على توليد طرق جديدة للحل من خلال امتلاك القدرة على تكوين الصورة للموقف الرياضي وملاحظة الخصائص التي تميزه نتيجة امتلاكهم لمستوى أكبر من البنى المعرفية، وهو ما يساعدهم على التأمل وتحفيزهم على طرح الأسئلة التي توجههم نحو تعلم المفاهيم والعلاقات الجديدة.
- ويلاحظ من نموذج بيرى-كيرين (Pirie-Kieren) أنه يعتمد على انتقال التلامذة بين عدد من المراحل ذات المستويات المختلفة من الفهم التي يتم من خلالها تنمية مستوى المعرفة لديهم، وامتلاكهم القدرة على التنقل بينها لإتقان المفاهيم الرياضية المختلفة. وبناءً على ما سبق، فإن نموذج بيرى-كيرين (Pirie-Kieren) يتميز بالعديد من الخصائص التي تمكن التلامذة من ترسيخ المعلومات والأفكار المرتبطة بالمفهوم من خلال الرجوع إلى المراحل بصورة متكررة للتأكد من توسع استيعابهم للرياضيات، كما أن التفكير لا يسير باتجاه واحد، لأن التلامذة الذين

يطبقون مستوى واحداً سيستمرون بالرجوع إلى المراحل السابقة لتوسيع فهمهم المفاهيمي في المادة الرياضية. وبما أن مادة الرياضيات تعتمد على التصورات الذهنية والقدرة على فهم العلاقات الرياضية، من خلال أنظمة مفاهيمية ذهنية تتضمن العلاقات والمتغيرات والقواعد والمبادئ المرتبطة بالرياضيات، وتمثيلها من خلال رموز وصور وأشكال بيانية ومعادلات، فإن السعي الى استخدام استراتيجية تدريس تساعد التلامذة على تنظيم أفكارهم، وتطوير مهاراتهم وقدراتهم الذهنية، هو من أهم أسباب إجراء الدراسة الحالية؛ إذ تحاول الدراسة الكشف عن أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم المفاهيمي لدى تلامذة الصف السابع الأساسي، بموجب نموذج بيرري وكيرين.

مشكلة الدراسة وأسئلتها:

على الرغم من أهمية تعلم الرياضيات التي تعد من أبرز المواد الأساسية في المنهاج المدرسي، إلا أن هناك العديد من المشكلات المرتبطة في فهمها، وتشير سيربينسكا (Sierpinska, 1994) في كتابها "الفهم في الرياضيات" بأن قضية الفهم تتطرق من وجود مشكلات جوهرية في تعليم الرياضيات، وتضيف وبالرغم من المحاولات الحثيثة على إعطاء تفسيرات وشروحات جيدة في كثير من المواقف التعليمية في الرياضيات، إلا أن الطلبة يخفقون في فهمها ويرتكبون العديد من الأخطاء وبخاصة المفاهيمية منها، وبالتالي يعد الفهم في الرياضيات والتدرج في تطور مستوياته لدى الطلبة المشكلة الحقيقية والرئيسة في تعليم وتعلم الرياضيات.

وعلى المستوى المحلي، فقد أكد المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية في العديد من تقاريره، ومن ضمنها التقرير الصادر عام (٢٠٢٠) أن مستوى أداء التلامذة في الأردن ليس بالمستوى المطلوب مقارنة بالعديد من الدول النامية والمتقدمة، وهذا ما أكدت عليه نتائج الاختبارات الدولية مثل بيزا (Pisa)، إذ لا يستطيع التلامذة التعامل مع مهمات رياضية مثيرة للاهتمام، لأنها تحتاج إلى فهم معمق ومستويات متقدمة من الفهم المفاهيمي، وبناء صورة ذهنية صحيحة للمفهوم والتمسك بها، وملاحظة خصائص المواقف الرياضية، و القدرة على التعميم والتحليل والتفسير وبناء أفكار جديدة. كما أن التلامذة يشعرون في كثير من الأحيان بصعوبة في حل المهمات، وتكوين الصيغ الرياضية، وإثبات صحة العلاقات الرياضية واستخدامها في مواقف جديدة، أو أنهم لا يمتلكون استراتيجيات توشّر وتؤكد على الفهم المفاهيمي.

ومن خلال خبرة الباحثين، فقد لوحظ وجود مشكلات في تعامل التلامذة مع المهمات الحياتية، يتمثل في عدم القدرة على ترجمة المهمة رياضياً، وعدم القدرة على ربط الرياضيات بالحياة، مما يؤثر سلباً على مستويات الفهم المفاهيمي في الرياضيات، وهو ما يتطلب البحث

حول الوسائل والطرق التي يمكن من خلالها تنمية مهاراتهم في مادة الرياضيات، وتعزيز قدرتهم على تطبيقها في الحياة اليومية، باعتبار أن اكتساب الفهم المفاهيمي للرياضيات يعدّ من الأهداف الأساسية في مختلف المراحل التعليمية، وأهم المكونات المعرفية التي تمكّن التلامذة من فهم الرياضيات، وإثراء معارفهم وخبراتهم، وإكسابهم القدرة على تحسين تحصيلهم الأكاديمي في الرياضيات. وبالاطلاع على الأدب السابق، فقد أكدت العديد من الدراسات ومنها دراسة الخطيب (2017) وبني عطا (2018) إلى ضعف في مؤشرات الفهم المفاهيمي ومستوياته لدى التلامذة، إلى جانب المشكلات التي يواجهونها في اكتساب مهارات الفهم المفاهيمي في الرياضيات، وهو ما يؤكد الحاجة إلى البحث عن الوسائل والاستراتيجيات التي يمكن من خلالها تنمية مهاراتهم وقدراتهم على الفهم المفاهيمي.

ومن خلال الاطلاع على الأدب السابق، فقد تبين وجود ندرة في الدراسات العالمية التي تناولت دور النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم المفاهيمي لدى التلامذة، وبخاصة في ضوء نموذج بيرى-كيرين (Pirie-Kieren) الذي تبنته هذه الدراسة، نظراً لأهميته في الكشف عن قصور في العديد من المهارات الرياضية لدى التلامذة والتي تمثل مستويات الفهم، إضافة إلى ندرة الدراسات على المستوى المحلي التي تناولت أثر النمذجة الرياضية في تعزيز الفهم المفاهيمي باستخدام نموذج بيرى - كيرين. وبناءً على ما سبق، فقد برزت مشكلة الدراسة الحالية وتلخصت في السؤال الآتي:

ما أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات حسب مستويات بيرى-كيرين في وحدة التحويلات الهندسية للصف السابع الأساسي؟

ويتفرع عن هذا السؤال الأسئلة الفرعية الآتية:

١. هل يوجد فرق ذو دلالة إحصائية ($\alpha = 0.05$) في أداء تلامذة الصف السابع على اختبار مستويات الفهم في الرياضيات في ضوء نموذج بيرى-كيرين يعزى لطريقة التدريس؟
 ٢. هل تختلف مستويات الفهم لدى تلامذة الصف السابع على كل مهمة من مهمات اختبار الفهم بناءً على نموذج بيرى-كيرين باختلاف طريقة التدريس (النمذجة الرياضية، الطريقة الاعتيادية)؟
- أهمية الدراسة:**

في ظل تتابع الدراسات في تربيوات الرياضيات، تتزايد التوجهات نحو استراتيجية النمذجة الرياضية وأثرها في كافة مجالات معايير المحتوى، وبذلك تستمد الدراسة الحالية أهميتها من أهمية موضوعها ومتغيراتها وندرته، وهو تقصّي أثر استراتيجية النمذجة الرياضية في تنمية

مستويات الفهم في الرياضيات بناءً على نموذج بييري-كيرين لدى تلامذة الصف السابع الأساسي، وذلك من خلال ما تقدمه الدراسة من معلومات جديدة حول أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم المفاهيمي لدى عينة من تلامذة الصف السابع الأساسي. وقد تسهم نتائج هذه الدراسة في توظيف ما كتب من أدب نظري في تفسير العلاقة بين متغيرات الدراسة الحالية، كما يعد ما تقدمه الدراسة من نتائج إضافة علمية إلى ما كتب حول تلك المتغيرات. أما على صعيد المجال العملي، يؤمل أن تفيد نتائج الدراسة الدارسين والباحثين والمهتمين في كيفية بناء برنامج تعليمي مستند إلى النمذجة الرياضية، وما يسفر أثره من نتائج قد تؤكد على ضرورة تبني النمذجة الرياضية كاستراتيجية تدريس في الرياضيات من قبل المعلمين، ومن خلال التركيز على حل مهمات واقعية، وكذلك ربما تعطي مؤشراً لمطوري المناهج والكتب المدرسية الاهتمام بجانب النمذجة الرياضية التي توسع آفاق تفكير الطالب أثناء التعامل مع المهمات الواقعية أو المواقف التي تحاكي ظواهر طبيعية أو غيرها. كما توجه أنظار المعلمين والباحثين والمهتمين في مجال الفهم المفاهيمي لأحد نماذج مستويات الفهم في الرياضيات من أجل استخدامه للكشف عن نماذج التفكير في هذا السياق بالنسبة للتلامذة، إضافة إلى أنها تفتح الباب لأبحاث جديدة.

مصطلحات الدراسة وتعريفاتها الإجرائية:

- **النموذج الرياضي:** وهو التعبير الرياضي عن مهمة واقعية، بعد تحديد المتغيرات الرئيسة في المهمة. وقد يكون النموذج الرياضي عبارة عن معادلات، أو متباينات، أو مصفوفات، أو أشكال هندسية، أو رسوم بيانية.
- **النمذجة الرياضية:** استراتيجية يتم من خلالها معالجة المهمات الواقعية- الحياتية، من خلال مجموعة من المهارات غير الخطية، وذلك في ضوء نموذج تبنته المعايير الأساسية المشتركة للرياضيات في الولايات المتحدة الأمريكية (CCSSM, 2010)، وتتمثل تلك المهارات ب: التعريف بالمهمة الحياتية، وتحديد متغيراتها، وصياغة نموذج رياضي، وحل النموذج الرياضي، وتفسير الحل ضمن الموقف أو المهمة الحياتية، وتصديق الحل والنموذج، وكتابة التقرير.
- **الأداء على اختبار الفهم المفاهيمي:** يتحدد بالعلامة التي تحصل عليها التلميذة نتيجة تعرضها لاختبار معد من قبل الباحثين تتضمن مجموعة من المهمات، ويحدد العلامة من خلال تدرج لمستويات نموذج بييري-كيرين (Pirie-Kieren)، بحيث تعطى علامة للمستوى الأول، وعلامتان للمستوى الثاني وهكذا.

- **مستويات الفهم المفاهيمي:** تم تبني نموذج بيرى-كيرين (Pirie & Kieren, 1994)، الذي يصف تطور الفهم المفاهيمي بأنه ديناميكي، ويتضمن عدة مستويات غير خطية ومتكررة، كما يتضمن اطاراً لخارطة نشاطات الفهم في سياقات مختلفة، بحيث يقوم التلميذ في هذه النشاطات ببناء الأفكار الرياضية، والبحث عنها، وجمعها. وتتمثل تلك المستويات ب: المعرفة الأولية (البدائية)، وبناء الصورة، وامتلاك الصورة، وملاحظة الخصائص، وإضفاء الطابع الرسمي، والملاحظة، والهيكلة، والابتكار.

حدود الدراسة ومحدداتها:

تحدد نتائج الدراسة وإمكانية تعميمها من خلال إجرائها خلال الفصل الدراسي الأول من العام الدراسي ٢٠٢٠/٢٠٢١ على عينة من تلميذات الصف السابع الأساسي الملتحقات في مدرستين من مدارس مديرية التربية والتعليم/ قسبة اردن. كما تتحدد بإجرائها على وحدة التحويلات الهندسية من كتاب الرياضيات للصف السابع الأساسي، والذي يدرس في المدارس التابعة لوزارة التربية والتعليم في الأردن بموجب قرار من مجلس التربية والتعليم. كما يتحدد بتحليل مستويات الفهم المفاهيمي حسب نموذج بيرى وكيرين، إضافة الى الخصائص السيكومترية لأدوات جمع البيانات.

الدراسات السابقة:

بعد استطلاع العديد من قواعد البيانات بهدف مراجعة الأدب البحثي المتعلق بموضوع الدراسة الحالية، تبين عدم وجود دراسات تجمع بين النمذجة الرياضية والفهم في الرياضيات وبخاصة نموذج بيرى-كيرين لتطور مستويات الفهم. وفي ضوء ما سبق تم عرض دراسات ذات علاقة لموضوع الدراسة حسب تسلسلها الزمني من الأقدم على الأحدث.

أجرى ألبيرت (Albert, 2020) دراسة في كينيا هدفت إلى التعرف على مستوى معرفة معلمي الرياضيات للنمذجة الرياضية، ودرجة تطبيقهم لها في تدريس الرياضيات، والكشف عن العلاقة بين النمذجة الرياضية وبين أداء التلامذة في الرياضيات. تكونت عينة الدراسة من (٢٧٠) تلميذ وتلميذة من تلامذة المرحلة الثانوية و(٤٠) معلماً ومعلمة من معلمي الرياضيات. ولتحقيق هدف الدراسة، وتم استخدام المنهجية المختلطة القائمة على استبانات المعلمين والتلامذة، وبطاقة ملاحظة ومقابلة شخصية. أظهرت نتائج الدراسة أن (٧٥%) من المعلمين المشاركين سجلوا مستويات منخفضة من المعرفة حول توظيف النمذجة الرياضية كاستراتيجية تدريس للرياضيات، وبينت النتائج أن (٨٥%) من معلمي الرياضيات المشاركين في الدراسة يعتمدون على الكتب المدرسية في تدريس الرياضيات بدون الاهتمام بمهام النمذجة الرياضية،

وَأَنَّ (٤٤) تلميذاً من التلامذة أظهروا أداءً جيداً في الاختبار بعدما تعرضوا لتعليمات عملية النمذجة الرياضية. مما دلّ على وجود علاقة ارتباطية موجبة بين توظيف استراتيجية النمذجة الرياضية وبين أداء الطلبة في الفهم المفاهيمي في الرياضيات.

وقام ياو ومانوشيري (Yao & Manouchehri, 2020) بدراسة في الولايات المتحدة الأمريكية هدفت إلى تعرف العلاقة بين تدخلات المعلم والتفكير الرياضي لدى التلامذة في التحويلات الهندسية باستخدام نموذج بييري-كيرين (Pirie-Kieren). تكونت عينة الدراسة من (٧) تلامذة من الصفين الثامن والتاسع. ولتحقيق أهداف الدراسة، تم استخدام الملاحظة، بينت النتائج وجود علاقة ارتباطية موجبة بين تدخلات المعلم والتفكير الرياضي للتلامذة في التحويلات الهندسية باستخدام نموذج بييري-كيرين (Pirie-Kieren)، حيث أنها تدعم وتوسع تحقيقات التلامذة حول التحويلات الهندسية. كما أنّ تدخلات المعلم قادرة على توسيع وتعزيز الفهم المفاهيمي لدى التلامذة في الرياضيات.

كما قام ياو (Yao, 2020) بدراسة في الولايات المتحدة الأمريكية هدفت إلى التعرف على مستوى الفهم الهندسي لدى الطلبة في بيئة تعلم ديناميكية في ضوء نموذج بييري-كيرين (Pirie - Kieren). تكونت عينة الدراسة من (٣) من المعلمين الطلبة. ولتحقيق هدف الدراسة، تم استخدام المنهجية النوعية المستندة إلى المقابلة. بينت نتائج الدراسة أن نموذج بييري-كيرين (Pirie - Kieren) يوفر أداة مفيدة لاكتساب الطلبة للفهم الهندسي.

في حين هدفت دراسة كوريا وهاسلام (Correa, & Haslam, 2021) في كندا هدفت إلى الكشف عن أثر النمذجة الرياضية في تعزيز الكفاءة الرياضية. تركزت الدراسة حول القدرة على تصميم وتطوير نماذج رياضية بدلاً من المشاركة باستخدام نماذج رياضية معروفة أو معطاة لمهمات الدراسة، والتي كانت عبارة عن أربع مهمات نمذجة رياضية. تكونت عينة الدراسة من (12) تلميذ وتلميذة من تلامذة المرحلة الثانوية من الصف الحادي عشر. ولتحقيق هدف الدراسة، تم استخدام المنهجية النوعية المستندة إلى المقابلة. بينت نتائج الدراسة أثر النمذجة الرياضية في تعزيز الكفاءة الرياضية، وذلك من خلال سلوكيات التلامذة في أثناء الحل، وتنامي قدرتهم على اتخاذ القرار، مما انعكس بشكل إيجابي على مستوى الإتقان لدى التلامذة.

وهدف دراسة صالحه والقطناني (Salha, & Qatanani, 2021) التي أجريت في فلسطين إلى التعرف على أثر النمذجة الرياضية في الفهم المفاهيمي لدى المعلمين-الطلبة. ولتحقيق هدف الدراسة، تم استخدام المنهجية شبه التجريبية حيث عمدت الدراسة إلى تقسيم أفراد عينة الدراسة والبالغ عددها (١٤٠) معلماً-طالباً إلى مجموعتين، تجريبية وضابطة تكونت كل مجموعة منها على (٧٠) معلماً-طالباً. كشفت نتائج الدراسة وجود فروق دالة إحصائياً في

مستوى الفهم المفاهيمي تعزى لأثر المجموعة، ولصالح المجموعة التجريبية على الاختبار البعدي مما يثبت فعالية التدريس باستخدام النمذجة الرياضية في تنمية مستوى الفهم المفاهيمي من ناحية المعرفة والفهم والتطبيق.

وهدفنا دراسة بانالوزا ورودريغز- فازكز (Arenas-Peñaloz & Rodríguez, 2022) إلى فهم التلامذة لمفهوم النسبة من خلال تتبع فهمهم حسب نموذج بيرى- كيرين. ولتحقيق هدف الدراسة تم استخدام الاستبانة والمقابلات، وتكونت عينة الدراسة من (٤) من تلامذة الصف السادس. أشارت النتائج إلى أن التلامذة لم يتمكنوا من إضفاء الطابع الرسمي على فهمهم لمفهوم النسبة بسبب الصعوبات في تطبيق الاستراتيجيات الرياضية بشكل صحيح عند حل المهام المقترحة.

وقام أرموتكو وبال (Armutcu & Bal, 2023) بدراسة في تركيا هدفت إلى الكشف عن أثر أنشطة النمذجة الرياضية على مهارات النمذجة لدى طلبة المدارس الثانوية في المباحث العلوم والتكنولوجيا والهندسة والرياضيات. ولتحقيق هدف الدراسة، تم تصميم نموذج تقييم مستوى كفاءة أنشطة النمذجة الرياضية، كما تم عمل مقابلات شبه مقننة. تكونت عينة الدراسة من (٦٦) طالباً وطالبة من طلبة الصف الثامن الذين يدرسون في المدارس الحكومية، واتبعت هذه الدراسة المنهج المختلط. أظهرت نتائج الدراسة أنه كان لأنشطة النمذجة الرياضية تأثيراً إيجابياً على مهارات النمذجة لدى الطلبة. كما بينت نتائج الدراسة أن الطلبة الذين درسوا أنشطة النمذجة الرياضية قد اكتسبوا وجهات نظر متنوعة ومختلفة.

الطريقة والإجراءات:

يحتوي هذا الجزء توضيحاً لمنهج الدراسة ومتغيراتها وعينتها وكيفية اختيارها، وأدوات الدراسة، وتحليل بياناتها وتتبع لمسار الدراسة وكيفية تطبيقها في الميدان.

منهج الدراسة:

تم استخدام المنهج شبه التجريبي بتصميم قبلي - بعدي لمجموعتين، إحداها تجريبية تعرضت للنمذجة الرياضية، والأخرى ضابطة درست بالطريقة الاعتيادية.

عينة الدراسة:

تم اختيار عينة من تلميذات الصف السابع الأساسي بالطريقة المتيسرة، وذلك من مدرستين تابعيتين لمديرية التربية والتعليم/ قسبة اردب، وذلك لعدم توفر شعبتين لتلميذات الصف السابع في المدرسة التي يعمل فيها الباحث الأول، إضافةً إلى ضمان عدم إطلاع المجموعة الضابطة على نشاطات النمذجة من تلميذات المجموعة التجريبية.

المادة التعليمية وأدوات الدراسة:

ومن أجل تحقيق أهداف الدراسة، تم تطوير المادة التعليمية على شكل دليل للمعلم، وذلك في ضوء مراحل النمذجة الرياضية التي تم اعتمادها، وكذلك اختبار لقياس مستويات الفهم المفاهيمي، ومقابلة تأملية.

أولاً- المادة التعليمية:

تم إعادة بناء وحدة التحويلات الهندسية من كتاب الرياضيات المعد لتلامذة الصف السابع الأساسي في الأردن للعام الدراسي 2020/2021. في ضوء مراحل النمذجة الرياضية المعتمدة في الدراسة الحالية، ومن ثم تم تدريس كافة المفاهيم، والأفكار، حسب نتائج التعلم للوقوف على أثر استراتيجية النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم المفاهيمي لدى التلميذات، وذلك بناء على نموذج بيرري-كيرين. فقد احتوت المادة التعليمية أربعة مواضيع، إذ تم تعيين كل موضوع كدرس في المادة التعليمية بدءاً بدرس التحويل الهندسي، ومن ثم الانعكاس، يليه الانسحاب، وفي النهاية درس الدوران. وقد تم اعتماد عدد من الإجراءات لتطوير المادة التعليمية بموجب النمذجة الرياضية كما يلي:

- **تحديد النتائج التعليمية المراد تحقيقها:** تم تحديد النتائج التعليمية بعد الإطلاع على النتائج التعليمية المذكورة في كتاب الرياضيات للصف السابع الأساسي للعام الدراسي 2020/2021، موزعة على أربعة دروس بواقع (18) حصة صفية.

- **التخطيط لتنفيذ استراتيجية النمذجة الرياضية:** بعد تحديد نتائج التعلم وصياغتها، تم توضيح كافة الإجراءات التدريسية التي من شأنها تحقيق النتائج التعليمية، حيث في البداية تم تعريض التلميذات لبرنامج تدريبي بواقع حصتين صفيتين، إذ تضمن البرنامج التدريبي شرحاً توضيحياً لإستراتيجية النمذجة الرياضية، ورسم مخطط لمراحلها، وتطبيق عدد من المهمات من خارج وحدة التحويلات الهندسية عليها، لتدريب التلميذات على مسار النمذجة الرياضية.

وتم اعتماد استراتيجية النمذجة الرياضية لتحقيق النتائج التعليمية وفق الخطوات التي طرحتها المعايير المشتركة في الرياضيات على مستوى الولايات المتحدة (CCSSM, 2010) حيث تضمنت المراحل الآتية: التعريف بالمشكلة الحياتية، وضع الفرضيات وتعريف المتغيرات، بناء نموذج رياضي (تطبيق الرياضيات)، تفسير الحل، التحقق من صحة النتائج (تقييم الحل)، كتابة تقرير.

ثالثاً- إعداد دليل إرشادي للمعلم: تم إعداد دليل تدريسي للاستعانة به أثناء تدريس المجموعة التجريبية من خلال استراتيجية النمذجة الرياضية، إذ يشتمل الدليل على: مقدمة

أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات في ضوء نموذج بييري- كيرين لدى تلامذة الصف السابع

حول النمذجة الرياضية من حيث معناها، وأهدافها وأهميتها، ومراحلها وكيفية تطبيقها من خلال توضيح دور كل من المعلم والتلامذة أثناء عملية التعلم والتعليم، بالإضافة إلى معلومات مفصلة عن الدروس، من حيث عدد الحصص، التعلم القبلي والنتائج الخاصة لكل درس، مع عدد وافي من الأمثلة المبنية على النمذجة الرياضية لإيصال الفكرة الرئيسة للوحدة بمختلف تنوع موضوعاتها والتي تبحث في التحويلات الهندسية (التحويل الهندسي، الانعكاس، الانسحاب، الدوران)، وعدد من المهمات لتقييم نتائج التعلم لدى التلامذة بعد الانتهاء من كل درس. ولبيان صدق الدليل الإرشادي وتوافقه مع تدريس التلميذات للمحتوى الرياضي لوحدة التحويلات الهندسية بناء على استراتيجية النمذجة الرياضية، وتم عرضه على عدد من المتخصصين في مناهج الرياضيات وأساليب تدريسها، للتأكد من صدق بناء الدليل بمحتوياته، حيث تم الأخذ بجميع الملحوظات المقترحة من المحكمين.

ثانياً- أدوات جمع البيانات: تم إعداد اختبار الفهم المفاهيمي الذي يُعنى محتواه في مادة التحويلات الهندسية وقدم كاختبار قبلي وبعدي، وذلك لبيان أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم المفاهيمي لدى التلميذات، والمقابلة تأملية لكل مهمة حسب مضمونها، وفيما يلي توضيح لهذه الأدوات:

اختبار الفهم في الرياضيات:

بعد مراجعة الأدب السابق كدراسة راهايونينغسي وساديجه وسوكوريانتو (Rahayuningsih, Sa'dijah & Sukoriyanto, 2019) ودراسة جونير وياجين (Güner & Uygun, 2019) ودراسة بانالوزا ورودريغز- فازكز (Arenas-Peñaloz & Rodríguez-Vásquez, 2022) تم إعداد (١١) مهمة منسجمة مع أفكار وحدة التحويلات الهندسية من كتاب الصف السابع الأساسي، وتهدف إلى تحديد أداء التلامذة على اختبار الفهم في الرياضيات بموجب نموذج بييري - كيرين للفهم الرياضي، وكذلك الكشف عن مستويات الفهم لدى التلميذات لكل من مجموعتي الدراسة. وللتحقق من صدق الاختبار تمّ عرضه على مجموعة من المحكمين من ذوي الاختصاص والدقة العلمية وتم أخذ ملاحظاتهم بعين الاعتبار حول مهمات الاختبار من حيث الصياغة اللغوية وملاءمة المحتوى الرياضي لمستوى الصف السابع، وفي ضوء ملحوظاتهم تم حذف أربع مهمات، وبذلك يصبح عدد مهمات الاختبار سبع مهمات. ومن أجل التحقق من الخصائص السيكموترية (الصعوبة والتمييز، الثبات) للاختبار، تم تقديمه لعينة استطلاعية - قبل إجراء التجربة- مكونة من (٢٠) تلميذة من مجتمع الدراسة ومن خارج عينتها. وتم اعتماد النسبة المئوية للتلميذات اللواتي أجبن عن الفقرة إجابة خاطئة كمعامل

صعوبة لكل مهمة من مهمات الاختبار، بينما حسب معامل التمييز لكل مهمة باعتماد ارتباط بيرسون بين المهمة والدرجة الكلية، والجدول (1) يبين معاملات الصعوبة ومعاملات التمييز لكل مهمة من مهمات الاختبار.

جدول (١): معاملات الصعوبة والتمييز لمهمات اختبار الفهم المفاهيمي

رقم المهمة	معامل الصعوبة	معامل التمييز
1	0.53	.70(**)
2	0.46	.64(**)
3	0.41	.69(**)
4	0.39	.69(**)
5	0.52	.69(**)
6	0.50	.72(**)
7	0.49	.74(**)

* دالة إحصائية عند مستوى الدلالة (٠.٠٥).

** دالة إحصائية عند مستوى الدلالة (٠.٠١).

يلاحظ من جدول (١) أنّ معاملات صعوبة الفقرات تراوحت بين (0.39-0.53)، ومعاملات التمييز تراوحت بين (٠.٦٤-٠.٧٤). وبناءً على ما أشار إليه عودة (٢٠١٠) للمدى المقبول لصعوبة الفقرة والذي يتراوح بين (٠.٢٠-٠.٨٠)، وكذلك بالنسبة لتمييز الفقرة، حيث أن الفقرة تعتبر جيدة إذا كان معامل تمييزها أعلى من (٠.٣٩)، ومقبولة وينصح بتحسينها إذا كان معامل تمييزها يتراوح بين (٠.٢٠-٠.٣٩)، وضعيفة وينصح بحذفها إذا كان معامل تمييزها يتراوح بين (صفر-٠.١٩)، وسالبة التمييز يجب حذفها، وعليه فلم يتم حذف أي من الفقرات بناءً على معامل الصعوبة أو معامل التمييز.

وللتأكد من ثبات أداة الدراسة، فقد تم حساب معامل الثبات بطريقة الاتساق الداخلي حسب معادلة كرونباخ-ألفا على العينة الاستطلاعية، إذ بلغ (0.73) واعتبرت هذه القيمة ملائمة لغايات هذه الدراسة.

تم وضع معايير تناسب كل مهمة، بناءً على مؤشرات كل مستوى من مستويات نموذج بييري-كيرين للفهم الرياضي، ولتوضيح آلية التصحيح تم اعتماد علامة واحدة لكل مستوى، بمعنى من كانت في المستوى الأول (معرفة أولية) تحصل على علامة واحدة، في المستوى الثاني (بناء الصورة) تحصل على علامتين، في المستوى الثالث (امتلاك الصورة) تحصل على (3) علامات، وهكذا. وكانت العلامة الكلية للاختبار (56) علامة حيث يأخذ أعلى مستوى

(٨) علامات. أما بالنسبة لتحديد الوقت المناسب للاختبار، فتم تحديده بناء على الوقت الكامل الذي استغرقته العينة الاستطلاعية، وتمثل ذلك في حصتين صفيتين بواقع (٤٥) دقيقة لكل حصة.

المقابلة:

تم عمل مقابلات تأملية مع عينة من التلميذات من كلٍ من المجموعتين التجريبية والضابطة، حيث تم إجراء المقابلة بعد تطبيق الدراسة وإتمام الاختبار البعدي وتصحيحه، وكانت أسئلة المقابلة بناء على حل التلميذة وبمثابة تتبع لكيفية تفكيرها في المهمة وإعطائها فرصة لتوضيح الحل والتعبير عنه بصورة كلامية لدراسة أثر فاعلية النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم الرياضي بناء على نموذج بيرى-كيرين، حيث استمرت المقابلة على مدار (٣) أيام دراسية بواقع حصتين صفيتين يومياً، وكانت طبيعة الأسئلة تتمثل في كيفية قراءة المهمة. مع التأكيد على الالتزام بصيغة لغوية واضحة للسؤال، وعدم التأثير على جواب التلميذة للحصول على الإجابة المرغوب بها، وتم رصد الأجوبة بدقة. حيث تم إجراء المقابلة مع (7) تلميذات من المجموعة التجريبية، و(7) تلميذات من المجموعة الضابطة، مع مراعاة المستوى التحصيلي للتلميذات في اختبار الفهم الرياضي. واعتمدت أسئلة المقابلة على حل التلميذات، إذ كانت بمثابة عملية توضيح للأفكار، وللرموز، ولطرق الحل.

تحليل البيانات:

للإجابة على السؤال الأول، تم استخدام تحليل التباين المصاحب الأحادي من أجل معرفة أثر التدريس بالنمذجة الرياضية في أداء التلميذات على اختبار الفهم حسب نموذج بيرى-كيرين (Pirie-Kieren). أما بالنسبة للسؤال الثاني، فقد تم حساب التكرارات والنسب المئوية لتلميذات الصف السابع في مجموعتي الدراسة وتصنيفهن حسب مستويات بيرى - كيرين من أجل المقارنة بين مستويات المجموعتين.

نتائج الدراسة:

يقدم هذا الجزء عرضاً لنتائج الدراسة حسب أسئلتها.

نتائج السؤال الأول والذي نص: "هل يوجد فرق ذو دلالة إحصائية ($\alpha = 0.05$) في أداء تلامذة الصف السابع على اختبار مستويات الفهم المفاهيمي يعزى لطريقة التدريس؟"

للإجابة عن هذا السؤال حسبت المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية والمتوسط الحسابي المعدل لأداء تلامذة الصف السابع على اختبار الفهم المفاهيمي في القياسين القبلي والبعدي تبعاً لطريقة التدريس (النمذجة الرياضية، الاعتيادية)، كما هو موضح في الجدول (٢).

جدول (٢) المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية والمتوسط الحسابي المعدل لأداء تلامذة الصف السابع على اختبار الفهم المفاهيمي للقياسين القبلي والبعدى تبعاً لطريقة التدريس

الخطأ المعياري	المتوسط الحسابي المعدل	القياس البعدى		القياس القبلي		العدد	طريقة التدريس
		الانحراف المعياري	المتوسط الحسابي*	الانحراف المعياري	المتوسط الحسابي*		
1.392	39.026	6.736	39.00	2.100	7.90	20	النمذجة الرياضية
1.392	20.424	5.568	20.45	1.888	7.75	20	الاعتيادية

*العلامة القسوى = (٥٦)

يتضح من الجدول (٢) وجود فرق ظاهري بين المتوسطات الحسابية لأداء تلامذة الصف السابع على اختبار الفهم الرياضي في القياس البعدى وفقاً لطريقة التدريس (النمذجة الرياضية، الاعتيادية) ولمعرفة فيما إذا كان هذا الفرق الظاهري ذا دلالة إحصائية، تم استخدام تحليل التباين الأحادي المصاحب (One way ANCOVA) للقياس البعدى لاختبار الفهم المفاهيمي وفقاً لطريقة التدريس أثر القياس القبلي، وفيما يلي عرض لهذه النتائج كما هو مبين في الجدول (٣):

جدول (٣) نتائج تحليل التباين الأحادي المصاحب (One way ANCOVA)

للقياس البعدى لأداء تلامذة الصف السابع على اختبار الفهم المفاهيمي وفقاً لطريقة التدريس (النمذجة الرياضية، الاعتيادية)

مربع إيتا η^2	مستوى الدلالة	قيمة ف	متوسط مجموع المربعات	درجات الحرية	مجموع المربعات	مصدر التباين
	٠.495	.474	18.361	1	18.361	القياس القبلي
٠.٥٨٣	٠.000	89.241	3455.292	1	3455.292	طريقة التدريس
			38.719	37	1432.589	الخطأ
				39	4891.975	الكلية

يتضح من الجدول (٣) وجود فرق ذي دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ($\alpha = 0.05$) في أداء تلامذة الصف السابع على اختبار الفهم المفاهيمي وفقاً لطريقة التدريس (النمذجة الرياضية، الاعتيادية)، فقد بلغت قيمة (ف) (89.241) بدلالة إحصائية مقدارها (٠.٠٠٠)، وهي قيمة دالة إحصائياً، وكان الفرق لصالح المجموعة التجريبية التي تعرّضت لطريقة النمذجة الرياضية. كما يتضح من الجدول (٣) أن حجم أثر طريقة التدريس كان كبيراً؛ فقد فسرت قيمة مربع إيتا (η^2) ما نسبته (58.3%) من التباين المُفسر (المتنبئ به) في المتغير التابع وهو اختبار الفهم المفاهيمي.

أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات
في ضوء نموذج بيرى- كيرين لدى تلامذة الصف السابع

نتائج السؤال الثاني والذي نص: "هل تختلف مستويات الفهم لدى تلامذة الصف السابع على كل مهمة من مهمات اختبار الفهم بناءً على نموذج بيرى-كيرين باختلاف طريقة التدريس (النمذجة الرياضية، الطريقة الاعتيادية)؟"

للإجابة على السؤال الثاني من أسئلة الدراسة، والمتمثل في الكشف عن مدى اختلاف مستويات الفهم على كل مهمة من مهمات اختبار الفهم بناءً على نموذج بيرى-كيرين، تم الاستعانة بنتائج التلميذات في الاختبار البعدي وفقاً لمؤشرات كل مستوى من مستويات النموذج، وعليه يبين الجدول التالي مستويات التلميذات في كلا المجموعتين التجريبية والضابطة في الاختبار البعدي.

جدول (٤) مستويات الفهم المفاهيمي لتلميذات الصف السابع حسب نموذج بيرى كيرين لكل من المجموعتين التجريبية والضابطة وعلى مستوى كل مهمة

المجموع	مستويات بيرى - كيرين							
	٨م	٧م	٦م	٥م	٤م	٣م	٢م	١م
٢٠	١	٣	٥	٣	٤	١	٢	١
%١٠٠	٥%	١٥%	٢٥%	١٥%	٢٠%	٥%	١٠%	٥%
٢٠	١	٣	٥	٦	٣	٢		
%١٠٠	٥%	١٥%	٢٥%	٣٠%	١٥%	١٠%		
٢٠		١	٣	٣	٤	٤	٢	٣
%١٠٠		٥%	١٥%	١٥%	٢٠%	٢٠%	١٠%	١٥%
٢٠	١	١	٤	٤	٤	٤	١	١
%١٠٠	٥%	٥%	٢٠%	٢٠%	٢٠%	٢٠%	٥%	٥%
٢٠		٧	٦	٥	١	١		
%١٠٠		٣٥%	٣٠%	٢٥%	٥%	٥%		
٢٠		٤	٦	٤	٤	٢		
%١٠٠		٢٠%	٣٠%	٢٠%	٢٠%	١٠%		
٢٠		٦	٤	٤	٢	٢	٢	
%١٠٠		٣٠%	٢٠%	٢٠%	١٠%	١٠%	١٠%	
	مستويات بيرى - كيرين							
	مهمات الاختبار البعدي							
المجموع	٨م	٧م	٦م	٥م	٤م	٣م	٢م	١م
٢٠						٦	٩	٥
%١٠٠						٣٠%	٤٥%	٢٥%
٢٠					١	٧	٧	٥
%١٠٠					٥%	٣٥%	٣٥%	٢٥%
٢٠					٦	٥	٥	٤

المجموع	التجريبية						مستويات بيرى - كيرين مهام الاختبار التجدي		
	٨م	٧م	٦م	٥م	٤م	٣م	٢م	١م	
%١٠٠					30%	25%	25%	20%	النسبة
٢٠					٧	7	4	2	العدد
%١٠٠					٣٥%	35%	20%	10%	النسبة
٢٠				1	4	8	6	1	العدد
%١٠٠				5%	20%	40%	30%	5%	النسبة
٢٠					٤	8	5	٣	العدد
%١٠٠					20%	40%	25%	15%	النسبة
٢٠				١	3	٧	٥	٤	العدد
%١٠٠				5%	15%	35%	25%	20%	النسبة

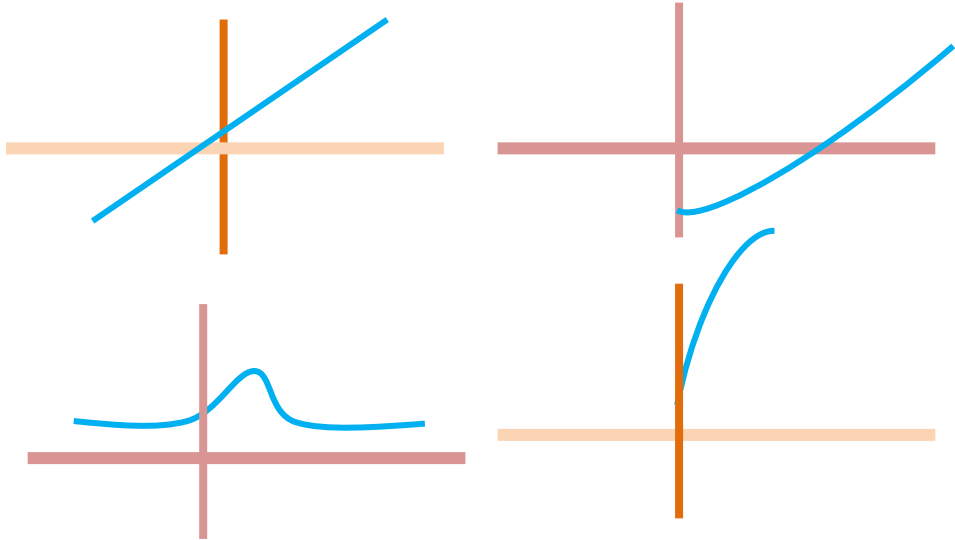
يبين الجدول (٤) بأن تلميذات المجموعة التجريبية اللواتي تعرضن للنمذجة الرياضية أثناء دراسة وحدة التحويلات الهندسية، قد سجلن مستويات فهم في الرياضيات تركزت في المستويات الثالث (امتلاك صورة)، والمستوى الرابع (ملاحظة الخصائص)، والخامس (إضفاء الطابع الرسمي)، والسادس (الملاحظة)، والسابع (البناء والهيكلة)، وذلك على مستوى كل مهمة من مهمات الإختبار. في حين تركزت مستويات الفهم لدى تلميذات المجموعة الضابطة في المستوى الأول (المعرفة البدائية)، والثاني (بناء صورة)، والثالث (امتلاك صورة)، والرابع (ملاحظة الخصائص).

كما يتضح من الجدول (٤) بأن ثلاث مهمات فقط، الأولى (الخواصة)، والثانية (قفص الطيور)، والرابعة (الرسوم البيانية) صنّفت فيها تلميذة واحدة من المجموعة التجريبية في المستوى الثامن (الابتكار)، وبالنسبة للمجموعة الضابطة، يتضح من الجدول (٤) أنّ طالبة واحدة فقط صنّفت في المستوى الخامس (إضفاء الطابع الرسمي) في كل من المهمتين الخامسة (فرشاة الألوان)، والمهمة السابعة (نظام الري).

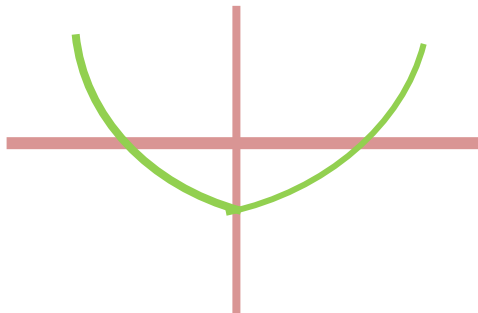
ومن أجل دعم النتائج الكمية للسؤال الثاني، تمّ عرض أمثلة من إجابات التلميذات المكتوبة على مهمات اختبار الفهم في الرياضيات. فمثلاً في إجابة إحدى تلميذات المجموعة التجريبية. نلاحظ أنه في المهمة الرابعة والتي تسأل مباشرة عن التحويلات الهندسية من خلال كيفية التمييز إذا كان رسم العلاقة يمثل تحويلاً هندسياً أم لا، يلحظ أنه يوجد تفاوت ما بين

أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات
في ضوء نموذج بيرى-كيرين لدى تلامذة الصف السابع

مستويات الفهم حسب نموذج بيرى-كيرين لكلا المجموعتين التجريبية والضابطة؛ إذ نصت المهمة الرابعة "أي الرسوم البيانية" على: "أي من الأشكال الآتية يعد تحويلاً هندسياً؟".

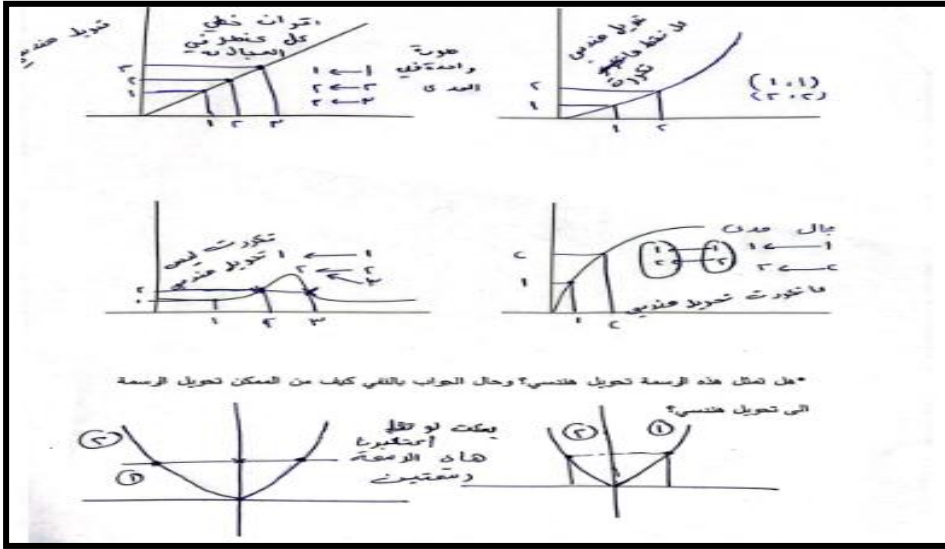


وهل تمثل هذه الرسوم تحويلاً هندسياً؟ وفي حال الجواب بالنفي كيف من الممكن تحويل الرسم إلى تحويل هندسي؟



وعند تصحيح إجابة المهمة الرابعة للتلميذة (٤) من المجموعة التجريبية، فقد استطاعت تمييز أحد الرسومات بأنها رسم لاقتران خطي وهو أحد المعلومات الأولية الواجب توافرها لدى التلميذة قبل البدء بشرح وحدة التحويلات الهندسية ومن ثم عملت على إدراج أسهم لنقاط وافترضت وجودها في المستوى البياني، فمثلاً الرسم الأولى ذكرت بأنها اقتران خطي وأن كل عدد على محور (x) يرتبط مع عدد على محور (y) وأوضحت ذلك أيضاً من خلال الأسهم وكتابة قاعدة التحويل الهندسي علماً بأنها فرضت قيم على محور (x) و (y) في كل رسم ومن

ثم استخدمت فكرة الأزواج المرتبة في الرسم الثانية، أما الرسم الثالثة؛ فعبّرت عن الحل بطريقة الأسهم، وفي الرسم الرابعة رسمت أشكال فن. إن قدرة التلميذة على تمييز الرسومات وتصنيفها وإدراك خصائص مفهوم التحويل الهندسي والقدرة على التعبير عن التحويل الهندسي من خلال مجموعة متنوعة من الطرق، والربط بين خصائص المفهوم وبين التعريف الرياضي والقدرة على إصدار الحكم على الرسومات، جعل منها في المستوى السادس (الملاحظة) من مستويات الفهم



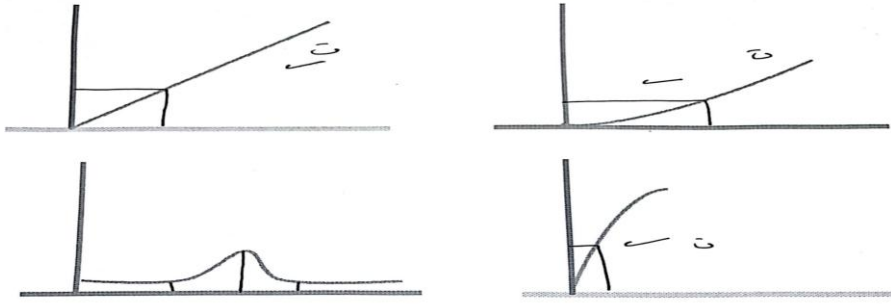
المفاهيمي. لكن عند إجابتها على الرسم الخامسة الواردة في نفس المهمة، وتمييز فكرة فصل المجال في محاولة منها لجعل الرسم تحويلاً هندسياً جعلها تتخطى المستوى السادس إلى المستوى الثامن وهو الابتكار، وفيما يلي حل للتلميذة (4) من المجموعة التجريبية.

شكل (٢): حل المهمة الرابعة من مهمات الاختبار للتلميذة (٤) من المجموعة التجريبية

بينما كان أعلى مستوى من مستويات الفهم للمجموعة الضابطة المستوى الرابع (ملاحظة الخصائص) والذي ما زال ضمن نطاق المستويات غير الرسمية حسب نموذج بيرى-كيرين. فقد تراوحت إجابات التلميذات ما بين المستوى الأول (المعرفة الأولية (البدائية)) والمستوى الرابع (ملاحظة الخصائص) إذ تناولت المهمة الفكرة الأساسية للتحويل الهندسي، فمثلاً التلميذة (٤) من المجموعة الضابطة قامت برسم خطوط من المحاور مروراً بالمنحنى الموجود في الرسم واستطاعت إطلاق حكم على مجموعة من الرسومات بأنها تحويل هندسي، إلا الرسم الرابعة لم تستطع إعطاء جواب عليها، مما جعلها تمتلك صورة عن التحويل الهندسي وكيفية التأكد من ارتباط كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى، ولكن عدم قدرتها على إصدار حكم

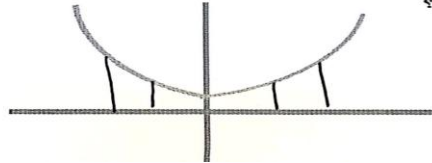
أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات
في ضوء نموذج بييري- كيرين لدى تلامذة الصف السابع

على الرسمه الرابعة، واكتفائها بطريقة واحدة للتعبير عن التحويل الهندسي والنظر على الرسمه الخامسة كأنها وحدة واحدة لاتستطيع تجزئتها جعل منها في المستوى الثالث وهو مستوى امتلاك صورة، والشكل (٣) يوضح حل التلميذة (٤) من المجموعة الضابطة.



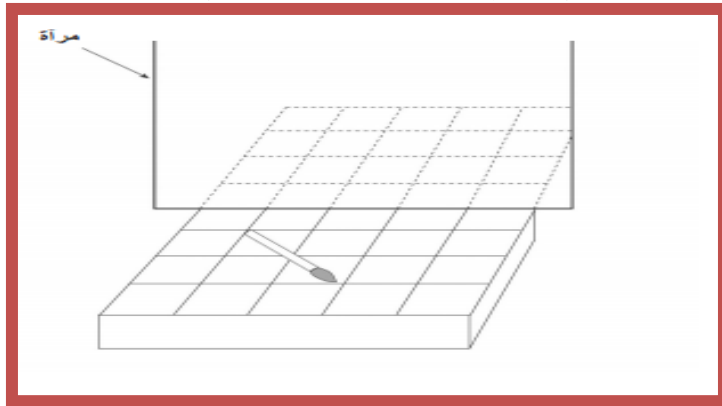
هل تمثل هذه الرسمه تحويل هندسي؟ وفي حال الجواب بالنفي كيف من الممكن تحويل

رسمه إلى تحويل هندسي؟

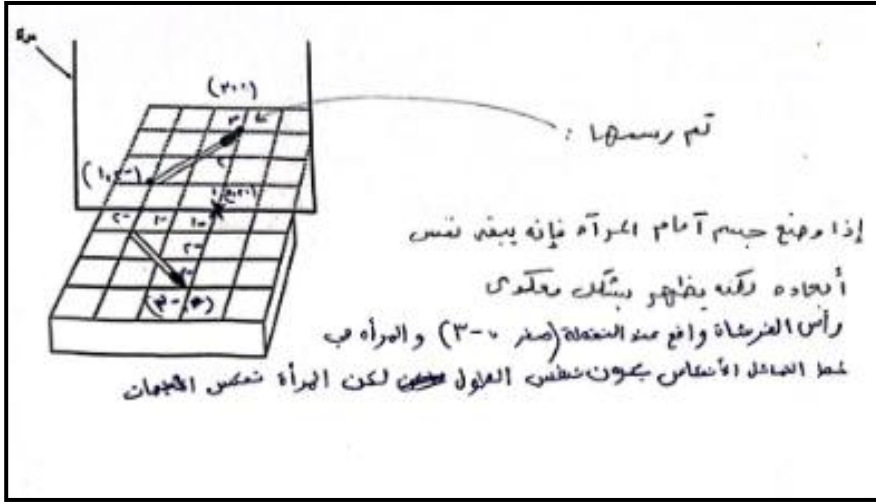


شكل (٣): حل المهمة الرابعة من مهمات الاختبار للتلميذة (٤) من المجموعة الضابطة

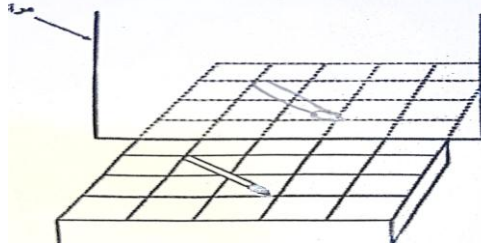
أما بالنسبة للمهمة الخامسة (الفرشاة) والتي تخص مفهوم الانعكاس، فقد تراوحت مستويات الفهم لدى التلميذات في المجموعة التجريبية وحسب نموذج بييري-كيرين ما بين المستوى الثالث (امتلاك الصورة) والمستوى السابع (البناء والهيكلة) والذي كان يبحث في موضع الانعكاس في وحدة التحويلات الهندسية وخصائصه، إذ تنص المهمة الخامسة على: "الصورة تشير إلى فرشاة ألوان وضعت على رف أمام مرآة. ارسم صورة لفرشاة الألوان بالنظر في المرآة؟ مع تبرير الإجابة. (استخدم شبكة الخطوط لمساعدتك)؟"



وبين الشكل (٤) حلاً للمهمة الخامسة من قبل التلميذة (٥) من المجموعة التجريبية.



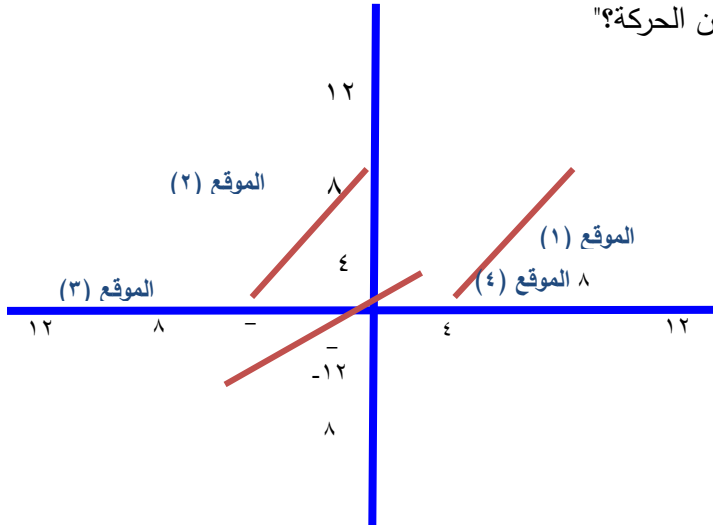
شكل (٥): حل المهمة الخامسة من مهمات الاختبار للتلميذة (٥) من المجموعة التجريبية عملت التلميذة على ترقيم المربعات واعتبارها مستوى بياني مما جعلها تشعر في ارتياح أكثر وألفة مع المعلومات الواردة في درس الانعكاس، واعتبرت المرآة خط التماثل وأنها واقعة على محور (س) وعملت على تحديد بداية الفرشاة ونهايتها، وراعت خصائص الانعكاس في المحافظة على الأبعاد وتفسير الاتجاه وتمييز خصائص المفهوم وقدرتها على تعميم الخصائص وترجمتها في الحل، مما جعلها في المستوى السابع (البناء والهيكلة).
أما في العينة الضابطة والتلميذة (٥)، فقد قامت برسم الفرشاة في المهمة الخامسة إذ عملت على رسم صورة مطابقة للفرشاة الأصلية من ناحية الاتجاه ولكنها لم تلتزم بالمقاسات مما يدل على أنها لم تمتلك معلومات أولية (بدائية) صحيحة عن الانعكاس مما جعلها في المستوى الأول وهو مستوى المعرفة الأولية (البدائية)، والشكل (٦) يبين حلاً للتلميذة.



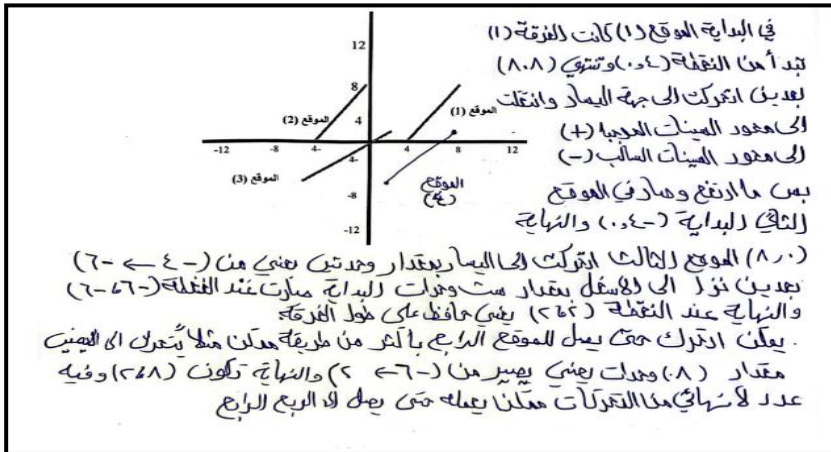
شكل (٦): حل المهمة الخامسة من مهمات الاختبار للتلميذة (٥) من المجموعة الضابطة

أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات
في ضوء نموذج بييري - كيرين لدى تلامذة الصف السابع

أما بالنسبة للمهمة السادسة "الفرقة العسكرية" والتي تناولت فكرة الانسحاب في التحولات الهندسية، فقد بلغت مجموعة تلميذات المجموعة التجريبية المستوى السابع (البناء والهيكلة)، وهو يعد من مستويات الفهم الرسمية لنموذج بييري - كيرين إذ نصت المهمة على: "في استعراض لفرقة عسكرية يسير الأفراد من الموقع (١) إلى الموقع (٢) ثم إلى الموقع (٣) ما هي خارطة الطريق للوصول من الموقع (١) إلى الموقع (٣)؟ وإذا استمرت الفرقة في الحركة للموقع (٤) كيف ستكون الحركة؟"



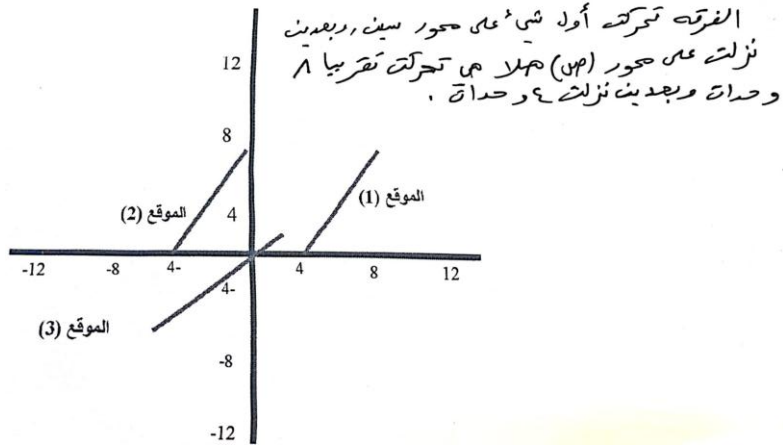
وفيما يلي عرض لحل تلميذة (٦) من المجموعة التجريبية، كما في الشكل (٧).



شكل (٧): حل المهمة السادسة من مهمات الاختبار للتلميذة (٦) من المجموعة التجريبية

هنا قامت التلميذة (٦) في البداية بتحديد نقطة البداية والنهاية للفرقة العسكرية، إذ أبدت معرفة أولية متماسكة من خلال القدرة على تحديد الأزواج المرتبة المرتبطة بنقطة البداية والنهاية، ومن ثم عملت على تتبع المسار في الموقع الثاني من خلال تحديد نقطة البداية والنهاية للموقع الثاني وأيضاً مقدار الحركة واتجاهها من خلال الانسحاب وهذا يدل على وضوح الصورة وامتلاكها على تتبع مسار الفرقة في الموقع (٣) ومن ثم المقدرة على تنبؤ مسار الفرقة في الموقع (٤) مما جعلها في المستوى السابع من مستويات الفهم لنموذج بييري-كيرين (البناء والهيكلة).

بينما التلميذة (٦) في العينة الضابطة استطاعت تتبع مسار الفرقة والتعبير عنها مقدراً، ولكن بشكل غير دقيق في كل مرحلة، أما بالنسبة للاتجاهات فكانت لغتها غير رياضية ولم تهتم لتحديد الحركة بالنسبة لمحاور المستوى البياني، ولم تجيب عن مسار الفرقة في الموقع الرابع، مما جعلها في المستوى الثالث من مستويات الفهم لنموذج بييري-كيرين وهو (امتلاك صورة)، والشكل (٨) يوضح حلاً لها.



شكل (٨): حل المهمة السادسة من مهمات الاختبار لتلميذة (٦) من المجموعة الضابطة

مناقشة النتائج والتوصيات:

يتضمن هذا الجزء مناقشة ما توصلت إليه الدراسة من نتائج، كما ويتضمن عدداً من التوصيات التي يمكن الاستفادة منها في الأدبيات التربوية والدراسات في المستقبل، وتعرض في ضوء أسئلتها:

مناقشة السؤال الأول والذي نص: "هل يوجد اختلاف ذو دلالة إحصائية ($\alpha = 0.05$) في أداء تلامذة الصف السابع على اختبار مستويات الفهم المفاهيمي باختلاف طريقة التدريس؟"

أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات في ضوء نموذج بييري- كيرين لدى تلامذة الصف السابع

أظهرت نتائج الدراسة وجود فرق ذي دلالة إحصائية في أداء تلامذة الصف السابع على اختبار الفهم الرياضي وفقاً لطريقة التدريس (النمذجة الرياضية، الاعتيادية) وبحجم أثر كبير، وكان الفرق لصالح الذين تعرضوا لطريقة النمذجة الرياضية مقارنة بأفراد الطريقة الاعتيادية. ويمكن عزو هذه النتيجة إلى أن النمذجة الرياضية إحدى الاستراتيجيات التدريسية التي تقوم على جعل الطلبة يخرطون في عملية التعلم من خلال ربط المسألة الرياضية المقدمة لهم في حصص الرياضيات مع المشاكل الحياتية التي يواجهونها في العالم الحقيقي مما يضيف الحس والمعنى عند تقديم عملية الحل ويترسخ لدى الطلبة المفهوم الرياضي المقدم لهم، ويزيد من مستوى الفهم لديهم.

كما يمكن تفسير هذه النتيجة إلى أن عملية النمذجة أساسها تبسيط المسألة الرياضية من خلال إدراك المتغيرات والعلاقات فيما بينها ومن ثم توظيف الرياضيات في عملية الحل. كما أن الوصول إلى حل المسألة الرياضية يعتمد بشكل رئيس على تطوير وبناء نماذج رياضية متوافقة مع المسألة وحتى الوصول إلى الإجابة الصحيحة ومن ثم العمل على تفسيرها وربطها مع العالم الحقيقي. وبالتالي، فإن على الطلبة التحقق من صحة الحل المقدم والتأكد من مدى تطبيقه على أرض الواقع في الحياة الواقعية.

ويتوافق ذلك مع ما أشار إليه بلوم (Blum, 2011) الذي ذكر أن النمذجة الرياضية هي عبارة عن إسقاط التجارب الشخصية في الحياة الواقعية على مسائل الرياضيات بحيث تصبح عملية التعلم والفهم مرتبطة بمدى قدرة الطلبة على تطبيق الحل. كما وتتسجم هذه الرؤية مع ما أشار إليه ليش وزاوجيوسكي (Lesh & Zawojewski, 2007) بأن النمذجة الرياضية عملية مرحلية تنتقل من خطوة إلى أخرى على شكل دورة تعلم. وأكد هذان الباحثان أيضاً أن توظيف النمذجة الرياضية تعزز الفهم المفاهيمي للطلبة إذ يساعدهم على فهم معطيات المسألة الرياضية واختيار استراتيجيات الحل المناسبة والتحقق من الإجابة وربطها مع مسائل حياتية خاصة بهم مما ينعكس على فهمهم للمفاهيم الرياضية المقدمة لهم.

كما يمكن أن تعزى هذه النتيجة إلى أن عملية النمذجة الرياضية أساسها توظيف النماذج من أجل تسهيل فهم المفاهيم الرياضية المقدمة للطلبة في مختلف المراحل الدراسية حيث تتطلب منهم توليد الأفكار بناءً على خبراتهم الحياتية المسبقة من خلال استحضار مواقف حياتية ومن ثم العمل على تمثيل العلاقات بين معطيات الحل باستخدام النماذج الرياضية وهذا ما يؤدي بالضرورة إلى أنهم يقومون بتوظيف مهارات التفكير العليا التي تتسجم مع مستويات الفهم حسب

نموذج بييري-كيرين، مما يساهم بدرجة كبيرة في تنمية الفهم الرياضي لديهم وهذا ما أكدته نتائج الدراسة الحالية.

ويرى بورا وأحمد (Bora & Ahmed, 2019) في هذا السياق إلى أن من أهم مميزات توظيف النمذجة الرياضية في تدريس المفاهيم الرياضية المختلفة هي أنها تقوم على تطبيق المعرفة النظرية على أرض الواقع وتعطي هامشاً للخطأ في عملية الحل إذ يستطيع الطلبة الرجوع مرات لعملية الحل وتعديل ما يرونه غير ملائم فيها عندما يتأكدون بأن الإجابة التي حصلوا عليها ليست صحيحة، وبناءً على ذلك يقومون بتعديل الإجابة المقدمة وهذا ما ينعكس إيجاباً على مستوى فهمهم المفاهيمي. كما أن النمذجة الرياضية تقوم على الحصول على التغذية الراجعة حول كيفية توظيف النمذجة مما يساهم في تحسين مستوى معرفتهم في الرياضيات وينمي لديهم مستوى الفهم.

مناقشة السؤال الثاني والذي نص: "هل تختلف مستويات الفهم لدى تلامذة الصف السابع على كل مهمة من مهمات اختبار الفهم بناءً على نموذج بييري-كيرين باختلاف طريقة التدريس (النمذجة الرياضية، الطريقة الاعتيادية)؟"

إن من أهم الأهداف في العملية التعليمية في الرياضيات بشكل خاص هي إتاحة الفرصة أمام التلامذة في التعلم بفهم من خلال إدراك العلاقات، وبيان الروابط بين المفاهيم، وبناء تصورات واضحة ومتنوعة لمخططات الحل. ومن ضمن استراتيجيات التدريس البنائية التي تدعم عملية الفهم للتلامذة في أثناء العملية التعليمية هي استراتيجية النمذجة الرياضية.

وتتمركز عملية النمذجة الرياضية حول كيفية التعامل مع المهمات الحياتية، إذ لا يمكن فصل الرياضيات عن الواقع، ففي بداية الأمر يتطلب من التلامذة قراءة المهمة بشكل متأنٍ وتوضيح متغيرات المهمة من معيطات ومطلوب، مما يترتب عليه بناء نموذج رياضي يُحاكي المهمة الحياتية، ومن ثم إيجاد حل رياضي للنموذج الرياضي، وفي النهاية يتم إسقاط الحل على المهمة الحياتية ثم إصدار الحكم في مدى مواءمة الحل للمهمة الحياتية، وإذا كان الحل غير ملائم للمهمة الحياتية سيعمل التلميذ على إعادة بناء نموذج رياضي للمهمة الحياتية وهكذا ليصل إلى حل ملائم للمهمة. وعليه فقد خضعت المجموعة التجريبية إلى دراسة وحدة التحويلات الهندسية من بعد عملية إعادة بنائها بما يتوافق مع استراتيجية النمذجة الرياضية في محاولة لمعرفة مدى تأثير استراتيجية النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم المفاهيمي لدى التلامذة وفق مؤشرات نموذج بييري-كيرين؛ إذ عمل على تقسيم مستويات الفهم المفاهيمي إلى ثمانية مستويات تبدأ من المعرفة الأولية (الابتدائية) بالموضوع، ثم بناء صورة ومن بعد ذلك امتلاك صورة للمفهوم، ومن ثم ملكية الخصائص التي تبحث في إدراك السمات والعلاقات للفكرة

أثر النمذجة الرياضية في تنمية مستويات الفهم في الرياضيات في ضوء نموذج بييري- كيرين لدى تلامذة الصف السابع

الرياضية، ويليه مستوى اضعاء الطابع الرسمي الذي يكمن في كيفية التعبير بصورة رياضية منطقية، ومن ثم ينطلق المتعلم إلى المستوى السادس وهو الملاحظة التي تعمل على تنمية القدرة على التجريب والتعميم، إضافة إلى ما تبقى من المستويات وهي الهيكلية التي تتمثل بناء المفاهيم والعلاقات لإيصال فكرة رياضية تساهم في حل مهمة حياتية، والإبداع أو التوليد ويتمثل في قدرة المتعلم على إيجاد حل يتصف بالذكاء والمرونة والفتنة.

وانطلاقاً من نتائج السؤال الثاني، فقد ساهمت دورة النمذجة الرياضية بمراحلها المختلفة في تعزيز فهم مهمات اختبار الفهم من خلال فهم المفاهيم الرياضية المرتبطة بالمهمة أو القدرة على تفسير المهمة، مما رفع مستوى فهم الرياضيات لدى التلميذات، والأهم من ذلك هو بناء اتجاهات إيجابية نحو الرياضيات والقدرة على التعامل مع المهمات الكلامية.

وعند تصفح التكرارات والنسب المئوية لتلميذات الصف السابع في كل مستوى من مستويات الفهم لبييري-كيرين، وعلى مستوى كل مهمة من مهمات الاختبار يتضح أن مستويات تلميذات المجموعة التجريبية قد تركزت في المستويات من الثالث (امتلاك الصورة) إلى السابع (الهيكلية)، بينما تركزت للمجموعة الضابطة في المستويات من الأول (المعرفة الأولية) إلى المستوى الرابع (ملاحظة الخصائص). وقد يُعزى هذا التفاوت في مستويات الفهم بناءً على نموذج بييري- كيرين لدى تلميذات المجموعتين الضابطة والتجريبية إلى طريقة التدريس وهي استراتيجية النمذجة الرياضية في دراسة وحدة التحويلات الهندسية.

وهذا ما أكدّ عليه العديد من الباحثين على أن استراتيجية النمذجة الرياضية تنمي مستويات الفهم المفاهيمي لدى التلامذة بمختلف التخصصات إذ ذكر كل من مقدادي وملكاوي والزعبي (٢٠١٣) بأن النمذجة الرياضية توفر للتلامذة سياقات تعلم حياتية يمكن من خلالها تحويل المهمة الحياتية إلى نموذج رياضي ومن ثم حل النموذج الرياضي وإسقاط الحل على المهمة الحياتية كما في وورنر (Worner, 2008). علاوة على ذلك، يشير صالحه والقطناني (Salha & Qtanani, 2021) بأن النمذجة الرياضية تشكل لدى الطلبة أشكالاً مختلفة من الفهم في الرياضيات.

وأكد جوانتي وهارتونو (Juanti & Hartono, 2019) أن النمذجة الرياضية هي أحد الاستراتيجيات المتبعة لتحسين مستوى التلامذة في مادة الرياضيات وتفسير النتائج المتحققة، والتأكد من صحة التفسير رياضياً. وفي ذات السياق، يشير جونق وستير وهي (Jung, Stehr & He, 2019) إلى أن النمذجة الرياضية تتمثل بعملية يتم من خلالها تمثيل المواقف والمفاهيم والأفكار الرياضية والتي تساعد على فهم الرياضيات وتفسير نتائجها بصورة كمية ونوعية.

كما تعمل النمذجة الرياضية على محو الأمية الرياضية، والتي تعنى بمعرفة المفاهيم الأساسية، وامتلاك الكفاءة مع المهارات الأساسية والإجراءات، وتركز على تقديم مادة الرياضيات بشكل أفضل من خلال التقنيات والاستراتيجيات المتنوعة (Saxena, Shrivasta & Bhardwaj, 2016). وهذا بدوره يوفر فرصة للوصول الى الطابع الرسمي من مستويات بييري-كيرين، بعد إسقاط الحل على المهمة، وربما يوفر مجالاً للتنبؤ وتوسيع الفكرة مما يعزز المستويات العليا والخارجية للفهم حسب نموذج بييري-كيرين.

علاوة على ما سبق، توفر استراتيجية النمذجة الرياضية للتلامذة بيئة تعليمية تفاعلية يستطيعون من خلالها التفاعل فيما بينهم، وتشارك معرفتهم الرياضية مما يعزز الفهم المفاهيمي لديهم. فالأساس في استراتيجية النمذجة الرياضية إحداث التغيير الإيجابي لدى التلامذة من حيث زيادة مستوى التفاعل الرياضي، إذ إنّ التلامذة الذي يستطيعون حل المهمات الرياضية تنمو لديهم اتجاهات إيجابية نحو الرياضيات، ويزيد من تقديرهم لها باعتبارها وسيلة تمكنهم من مواجهة المسائل الحياتية من خلال إتاحة فرص الحوار والنقاش أثناء حل المهمات الرياضية، وهذا بدوره يعمل على توفير بيئة تعلم آمنة يستطيعون من خلالها تبادل المعارف والخبرات والدخول في حوار ونقاش مع الأقران والمعلم داخل الغرفة الصفية، وينمي لديهم حب المعرفة والاستطلاع ويزيد من مستوى الاستقلالية في التعلم.

التوصيات:

خُصت الدراسة إلى مجموعة من التوصيات على أن تنتج مجالاً أوسع للبحث والدراسة ومنها ما يلي:

- ١- توظيف أطر النمذجة الرياضية في تعليم وتعلم الرياضيات المدرسية.
- ٢- توعية التلامذة بأهمية المواقف الحياتية وتدريبهم على كيفية التعامل معها أثناء حلها، وربطها بالرياضيات من أجل زيادة فهم المحتوى الرياضي لديهم.
- ٣- عقد دورات تدريبية لمعلمي الرياضيات تتعلق بفهم نموذج بييري-كيرين واستخدامه في تصنيف مستويات الفهم في الرياضيات لدى تلامذتهم.
- ٤- تضمين أدلة المعلمين المرافقة للكتب المدرسية بنشاطات ممارسة النمذجة الرياضية.
- ٥- إجراء المزيد من الدراسات والأبحاث التربوية التي تدعم الفهم في الرياضيات لدى التلامذة في ضوء نموذج بييري-كيرين.

المراجع والمصادر

- بني عطا، رشا. (٢٠١٨). الفهم المفاهيمي للمشتقة لدى طلبة الجامعات الأردنية ومقدرتهم على حل مهمات تطبيقية في سياقات حياتية. أطروحة دكتوراه غير منشورة، جامعة اليرموك، الأردن.
- الخطيب، محمد. (٢٠١٧). أثر استخدام دورة النمذجة الرياضية في تنمية التفكير اللغوي ومهارات ما وراء المعرفة في الرياضيات لدى طلاب الصف الأول المتوسط في المدينة المنورة. *دراسات العلوم التربوية*، ٤٤ (٤)، ١-١٥.
- الرفاعي، أماني وخصاونة، أمل والبركات، علي. (٢٠٢١). فاعلية برنامج قائم على الاتصال الرياضي في الفهم المفاهيمي وقلق الرياضيات لدى طلبة الصف الثامن الأساسي في الأردن. *المجلة التربوية الأردنية*، ٦ (٤)، ١٧٥-٢٠٢.
- عبد الملك، مريم. (٢٠١٩). تحليل دور الحديث الرياضي في نمو الفهم الرياضي لموضوع الكسور لدى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي باستخدام نموذج بيرى وكيرين. *المجلة العلمية لكلية التربية-جامعة أسيوط*، ٣٥ (٩)، ٥٣٣-٥٧٧.
- المركز الوطني لتنمية الموارد البشرية. (٢٠٢٠). *التقرير الوطني الأردني عن الدراسة الدولية بيزا لعام ٢٠١٨ (PISA 2018)*.
- مقدادي، ربي وملكاوي، أمال والزعبي، علي. (٢٠١٣). المعرفة المفاهيمية والمعرفة الإجرائية بالكسور وعلاقتها بقلق الرياضيات لدى الطلبة/المعلمين. *دراسات-العلوم التربوية*، ٤٠ (٢)، ١٥٧٠-١٥٥٥.
- الياسين، محمد وخصاونة، أمل. (٢٠١٨). العلاقة بين تصورات معلمي الرياضيات للنمذجة الرياضية وكفاءتهم الذاتية في مهارات النمذجة. *مجلة جامعة القدس المفتوحة للأبحاث والدراسات التربوية والنفسية*، ٨ (٢٣)، ١٢٢-١٤٠.
- Albert, O. (2020). *Mathematical Modelling Approaches and the Learner's Conceptual Understanding of Mathematics at Secondary School Level in Kisii County, Kenya*. Thesis Master Okenyatta University.
- Alhammouri, A., Durkee, J. & Foley, G.(2017). Where to place a post? Engaging students in the mathematical modeling process. *Ohio Journal of Mathematics*, 75, 41-75.
- Arenas-Peñaloza, J. & Rodríguez-Vásquez, F. (2022). Understanding Early Mathematical Modelling: First Steps in the Process of

- Translation Between Real- world Contexts and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI: 10.17648/acta.scientiae.6826.
- Arenas-Peñaloza, J. & Rodríguez-Vásquez, F. (2022). Understanding Early Mathematical Modelling: First Steps in the Process of Translation Between Real- world Contexts and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI: 10.17648/acta.scientiae.6826.
- Armutcu, Y. & Bal, A. P. (2023). The effect of mathematical modelling activities on students' mathematical modelling skills in the context of STEM education. *International Journal of Contemporary Educational Research*, 10(1), 42-55.
- Arseven, A. (2015). Mathematical modelling approach in mathematics education. *Universal Journal of Educational Research*, 3(12), 973-980.
- Asempapa, R. (2018). Assessing teachers' knowledge of mathematical modeling: Results from an initial scale development. *Journal of Mathematics Education*, 11(1), 1-16.
- Bikic, N., Burgic, D., & kurtic, V. (2021). The Effects of Mathematical Modelling in Mathematics Teaching of Linear, Quadratic and Logarithmic Functions. *European Journal of Mathematics and Science Education*, 2(2), 129-144.
- Blum, W. (2011). *Can modelling be taught and learnt? some answers from empirical research*. In book: Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (pp.15-30). New York: Springer.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (2007). *Introduction*. In *Modeling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study (pp. 3-32). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bora, A. & Ahmed, S. (2019). Mathematical modeling: An important tool for mathematics teaching. *IJRAR*, 6(2), 252-256.
- Correa, P., & Haslam, D. (2021). Mathematical Proficiency as the Basis for Assessment: A Literature Review and its Potentialities. *Mathematics Teaching Research Journal*, 12(4), 1-18.

- Dundar, S., Gokkurt, B., & Soyly, Y. (2012). Mathematical Modelling at a Glance: A Theoretical Study. *Sefa Dundar et al. / Procedia - Social and Behavioral Sciences* 46: 3466-3470.
- Genc, M. & Erbas, A. (2019). Secondary mathematics teachers' conceptions of mathematical literacy. *International Journal of Education in Mathematics, Science & Technology (IJEMST)*, 7(3), 222-237.
- Güner, P. & Uygün, T. (2019). Examining students' mathematical understanding of patterns by Pirie-Kieren model. *Hacettepe University Journal of Education*. Advance online publication. doi: 10.16986/HUJE.2019056035.
- Hernandez, M., Levy, R., Felton-Koestler, M. & Zbiek, R. (2017). Mathematical modeling in the high school curriculum. *Mathematics Teacher*, 110(5), 336-342.
- Juanti, L. & Hartono, Y. (2019). Students' understanding of system of linear equations through mathematical modeling. *Journal of Physics*, 1166(1), 12023-12024.
- Jung, H., Stehr, E. & He, J. (2019). Mathematical modeling opportunities reported by secondary mathematics preservice teachers and instructors. *School Science & Mathematics*, 119(6), 353-365.
- Laswadi, Y., Kusumah, Y., Darwis, S. & Afgani, J. (2016). Developing conceptual understanding and procedural fluency for junior high school students through model-facilitated learning (MFL). *European Journal of Science & Mathematics Education*, 4(1), 67-74.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007) *Problem Solving and Modeling*. In: Lester, F., Ed., *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Greenwich: Information Age Publishing.
- Mlotshwa, N., Tunjera, N. & Chigona, A. (2020). Integration of MOODLE into the classroom for better conceptual understanding of functions in Mathematics. *South African Journal of Education*, 40(3), 1-14.
- National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers.(2010).Common core state standards

- for mathematics. Washington, DC: Author. Retrieved from http://corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.
- Pirie, S. & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 7-11.
- Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it?. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2), 165-190.
- Rahayuningsih, S., Sa'dijah, C. & Sukoriyanto, A. (2018). Layers of conceptual understanding of fractions among elementary student. *Journal on Educational Psychology*, 12(3), 13-23.
- Sahin, Z., Yenmez, A. & Erbas, A. (2015). Relational understanding of the derivative concept through mathematical modeling: A case study. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(1), 177-188.
- Salha, S. & Qatanani, N. (2021). Impact of the Mathematical Modeling on Conceptual Understanding Among Student-Teachers. *journal of southwest jiaotong university*. 56(5): 538- 551.
- Saxena, R., Shrivasta, K. & Bhardwaj, R. (2016). Teaching mathematical modeling in mathematics education. *Journal of Education and Practice*, 7(11), 34-44.
- Sierpiska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Psychology Press.
- Stevenson, M. (2020). Growth of pedagogical content knowledge and 'understanding mathematics in depth': conceptions of pre-service teachers. *Teacher Development*, 24(2), 165-183.
- Suarsana, I., Widiasih, N. & Suparta, I. (2018). The effect of brain based learning on second grade junior students' mathematics conceptual understanding on polyhedron. *Journal on Mathematics Education*, 9(1), 145-156.
- Sutherland, M., Firestone, A., Doabler, C. & Clarke, B. (2020). Building conceptual understanding of linear measurement: teaching students with mathematics learning disabilities. *Teaching Exceptional Children*, 53(1), 70-78.

- Von Glasersfeld, E. (1983). *Learning as constructive activity*. Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education, Montreal, Canada.
- Yao, X. & Manouchehri, A. (2020). Teacher interventions for advancing students' mathematical understanding. *Education Sciences*, 10(164), 1-21.
- Yao, X. (2020). Characterizing Learners' Growth of Geometric Understanding in Dynamic Geometry Environments: a Perspective of the Pirie–Kieren Theory. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1007.
- Zulkarnaen, R. (2021). *Why is mathematical modeling so difficult for students?*. The 8th Annual Basic Science International Conference, 1-6.