أثر المعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة
لدى طلبة الصف السادس الأساسي
في مقدرتهم على حل المسألة الحسابية

إعـــــداد

د/ إبراهيم ضيف الله محمد مقابلة

جامعة اليرموك – كلية التربية – قسم المناهج والتدريس

أثر المعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة لدى طلبة الصف السادس الأساسي في مقدرتهم على حل المسألة الحسابية

د/ إبراهيم ضيف الله محمد مقابلة*

مقدمة:

يكثر الحديث عن أهمية المرحلة الأساسية الأولى في تعلم الرياضيات والأثر الكبير لنوعية التعليم الذي يتلقاه الطالب في هذه المرحلة في نجاحه في تعلم الموضوعات الرياضية اللاحقة والإقبال على الرياضيات والتميز بها. وتؤكد العديد من الدراسات (Blair, 2003; Knuth et al., 2006) على أن نوع التعلم الذي يمكن أن يحقق مثل هذا النجاح يجب أن يقوم على الفهم.

ويتطلب التعلم المبني على الفهم عدم الاعتماد على الطرق التقليدية المتمثلة في حفظ الحقائق وحل أوراق عمل وتمارين تركز على اكتساب مهارات من خلال التدرب على خوارزميات لاستخدامها في حل المسائل الحسابية (Warren, 2003)؛ فعلى الرغم من أن التركيز على المعرفة الإجرائية وتدريب الطلبة على إجراء العمليات الحسابية بصورة آلية في المرحلة الأساسية الأولى يساعدهم في حل المسائل الروتينية التي تعرض عليهم داخل الغرفة الصفية وفي كتب الرياضيات التي يدرسونها (McNeil & Alibali, 2005)، إلا أن هذا التركيز في الحقيقة لا يحقق لهم الفهم، وبالتالي قد يخفقوا في حل مسائل رياضية تمثل مواقف جديدة، تتطلب منهم فهما متعمقا لهذه الإجراءات وفهم المفاهيم المتعلقة بها.

ومع تطور فهم الطلبة للرياضيات وتقدمهم عبر الصفوف يزيد اعتمادهم على استخدام الرموز في لغة الرياضيات؛ لأنها توفر طريقة مختصرة ودقيقة للتعبير عن الأفكار الرياضية. ويعتمد فهمهم لهذه الرموز الرياضية على طريقة كتابتها وقراءتها وكيفية التعامل معها في سياقات ومواقف نظرية وتطبيقية (Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998). ولبناء فهم قوي لرمز جديد في الرياضيات يراه الطلبة لأول مرة، علينا مساعدتهم في الربط بين الرمز الجديد

---

* د/ إبراهيم ضيف الله محمد مقابلة: جامعة اليرموك–كلية التربية– قسم المناهج والتدريس.

والمعرفة الرياضية السابقة لديهم من خلال سياقات متعددة تظهر فيها المعاني المختلفة للرمز الجديد (Sherman & Bisanz, 2009).

وتعد المساواة ورمز إشارة المساواة من المفاهيم الرياضية المهمة التي تتطلب فهماً جيداً في المرحلة الأساسية الأولى، ويعتمد عليها تعلم الجبر لاحقا بشكل كبير، إلى جانب أهميتها في تعلم الموضوعات الأخرى في الرياضيات. وقد أشارت العديد من الدراسات (Gray & Tall, 1992; Knuth, Stephens, McNeil, & Alibabi, 2006; McNeil, 2004; Molina, Castro, & Castro, 2009; Sherman & Bisanz, 2009) إلى أن ضعفَ عدد كبير من الطلبة في مادة الجبر يمكن أن يعود إلى ضعف فهمهم للمعاني المتعلقة بإشارة المساواة.

فغالبا ما يركز الحساب في الصفوف الأولى على معنى إشارة المساواة كعملية ترتبط بالحاجة لإجراء عملية حسابية وكتابة نتيجة، كون المسائل التي تعرض عليهم تحوي دائما عملية حسابية أو أكثر (+، − ، ...) إلى جانب إشارة المساواة (Carpenter, Franke, & Levi, 2003). فهم في الحقيقة يركزون على العملية الحسابية الموجودة وكيفية إجرائها في حين ينظرون إلى إشارة المساواة كرمز يشير إلى المكان المخصص لكتابة النتيجة؛ فلو عرضنا عليهم العبارة العددية ٧ + ٦ دون إشارة المساواة نجد أن العديد منهم سيكتب لها نتيجة وبعضهم قد يضيف رمز المساواة قبل كتابة النتيجة.

ويشير كاربنتر (Carpenter et al., 2003) إلى العديد من الأخطاء في فهم الطلبة لإشارة المساواة، فعند سؤالهم عن العدد الذي يجب وضعه في المربع في مسألة حسابية مثل $11 + 5 = \square + 4$ لتصبح صحيحة، بعضهم أظهر الحاجة لكتابة نتيجة الجمع بعد إشارة المساواة مباشرة فكان حلهم $11 + 5 = \boxed{16} + 4$ (بدلا من ١٢) وهذا يعني أن لديهم فهم لإشارة المساواة كعملية ترتبط بالحاجة لإجراء حسابات بدلا من عمل توازن بين طرفي إشارة المساواة وهو معنى إشارة المساواة كعلاقة. وفي نفس الدراسة السابقة وعند سؤال الطلبة عن صحة عبارات عددية كانت إجابة الطلبة أن المسألة $4 + 5 = 9$ صحيحة بينما المسألة $9 = 5 + 4$ غير صحيحة وبرروا ذلك أنها مكتوبة بطريقة معكوسة ولا يجب أن تكتب كذلك وهذا يؤكد أن هؤلاء الطلبة طوَّروا فهما لإشارة المساواة كعملية.

وعند انتقال الطلبة لدراسة الجبر يصبح معنى إشارة المساواة كعملية والذي تكوَّن لدى الطلبة أثناء تعلم الحساب غير فعّال، فالمعادلات على الشكل $x + 2 = 3x - 4$ مثلًا لن يكون لها معنى بالنسبة لهم لأن إشارة المساواة فيها تركز على أن المقدارين على طرفيها متساويان في الكمية ولا تعني الحاجة لإجراء عملية حسابية وكتابة نتيجة (Boaler & Humphreys, 2005).

ونظرًا للدور البارز الذي يلعبه الجبر في تعلم وتعليم الرياضيات نجد العديد من الباحثين (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Warren, 2003) يدعون للتركيز عليه حتى في الصفوف الأولى، وتعد الجمل المفتوحة الطريقة الأنسب لتحقيق هذا الغرض. وتمثل الجمل المفتوحة صورة أولية للمعادلات الجبرية التي سيتعامل معها الطلبة لاحقًا، حيث تستبدل فيها المتغيرات إما بأشكال هندسية أو بخط كما في المسائل $2 + \square = 3 + 5$، 4 + 5 = _ + 6.

وتساعد النقاشات التي تجري حول الصيغ والبنى المتعددة للجمل المفتوحة والخصائص التي تمثلها في تعلم موضوعات الحساب بشكل أفضل وتسهم في تطوير فهم متعمق لإشارة المساواة كعلاقة، كما توفر أساسًا قويًا لتعلم الجبر لاحقًا (Carpenter et al., 2003). ويمكن للفهم الخاطئ لإشارة المساواة أن يعيق تعلم الطلبة للحساب ويحد من قدرتهم على تحليل العبارات الرياضية والوصول إلى حلول صحيحة للمعادلات، وبالتالي يخفقون في دراسة الجبر لاحقا، لذا من الضروري التأكد من فهم الطلبة لإشارة المساواة كعلاقة قبل دراسة الجبر.

مشكلة الدراسة وأسئلتها:

يعد رمز إشارة المساواة " = " أكثر الرموز شيوعا في كتب الرياضيات المدرسية، حيث يتم تقديم هذا الرمز بداية في الصفوف الأولى للربط بين عملية حسابية ونتيجتها، مثل $\boxed{٥ + ٤} = \boxed{٩}$ فيتكون لدى الطلبة فهما لإشارة المساواة مرتبطا بالحاجة إلى إجراء عمليات حسابية وكتابة نتيجة. وما يعزز هذا الفهم أيضا الشكل النمطي للمسائل العددية التي تحوي إحدى العمليات الحسابية في الطرف الأيمن لإشارة المساواة وفي الطرف الأيسر رمز "□" لكتابة النتيجة في داخله (مثال: □=f +h). ويشار إلى هذا المعنى بفهم إشارة المساواة كعملية. وعند الانتقال إلى الصفوف اللاحقة لا يتم التطرق للمعاني الأخرى التي تحملها إشارة المساواة، كون هذا الرمز أصبح مألوفا لدى الطلبة.

وتشير وثيقة مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية الصادرة عن المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة الأمريكية (NCTM, 2000) إلى ضرورة فهم إشارة المساواة كعلاقة (والتي تعني أن المقدارين على طرفيها متساويان) حتى في الصفوف الأولى؛ لما لهذا المعنى من أثر كبير في تسهيل دراسة الجبر لاحقا، فقد أشارت العديد من الدراسات (Carpenter et al., 2003; Jones & Pratt, 2012; Knuth et al., 2006; McNeil & Alibali, 2005) إلى أن إحدى العثرات الرئيسية في دراسة الجبر يرتبط بعدم فهم إشارة المساواة كعلاقة.

وبالرغم من التطور الكبير في مجال تعلم وتعليم الرياضيات، والاعتماد على معايير عالمية (معايير NCTM لعام ٢٠٠٠) في تطوير مناهج الرياضيات لمختلف الصفوف إلا أن نتائج العديد من الدراسات وحتى الحديثة منها (Jones & Pratt, 2012; Rittle-Johnson et al., 2011) تظهر أن العديد من الطلبة وفي مختلف الصفوف لم يطوروا فهما كافيا لرمز إشارة المساواة؛ وبالتالي تبدأ معاناتهم في دراسة الجبر ويلجؤوا إلى حفظ إجراءات تساعدهم في حل المعادلات دون أن يفهموا المنطق وراء اختيار هذه الإجراءات.

مما سبق نلاحظ أن هناك ضرورة ملحة للكشف عن المعاني المتعلقة بإشارة المساواة لدى الطلبة قبل دراسة الجبر ومساعدتهم على تطوير هذا الفهم. وفي ظل غياب اختبار وطني في الرياضيات يقيس مقدار فهم الطلبة لإشارة المساواة، بالإضافة إلى عدم وجود دراسات محلية تتعلق بهذا الموضوع – في حدود علم الباحث – جاءت هذه الدراسة لسد هذا النقص، وتسليط الضوء على أهمية مساعدة الطلبة على تكوين فهم لإشارة المساواة كعلاقة، وبخاصة الطلبة الذين لديهم مشكلات في دراسة الجبر.

وتهدف هذه الدراسة إلى الكشف عن المعاني المتعلقة بفهم الطلبة لإشارة المساواة قبل دراسة الجبر، وقياس أثر هذا الفهم في قدرتهم على حل المسألة الحسابية، كأحد أهم المؤشرات على القدرة الرياضية للطلبة في الصفوف الأولى.

وبالتحديد تحاول هذه الدراسة الإجابة عن الأسئلة التالية:

١. ما المعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة لدى طلبة الصف السادس الأساسي؟

٢. هل تختلف قدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية باختلاف المعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة (كعملية، كعلاقة)؟
٣. هل هناك أثر ذو دلالة إحصائية للتفاعل بين نوع الفهم لإشارة المساواة (كعملية، كعلاقة) والأنشطة الصفية (التركيز على أوراق العمل، بدون أوراق عمل) في قدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية؟

هدف الدراسة:

الكشف عن أثر المعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة لدى طلبة الصف السادس الأساسي في مقدرتهم على حل المسألة الحسابية.

أهمية الدراسة:

تستمد الدراسة الحالية أهميتها من تناولها أحد أهم مفاهيم الرياضيات في المرحلة الأساسية الأولى، وهو مفهوم إشارة المساواة. حيث تشير العديد من الدراسات إلى ضرورة التأكد من أن الطلبة يمتلكون فهما لإشارة المساواة كعلاقة (والتي تعني أن المقدارين على طرفي إشارة المساواة متماثلان) قبل دراسة الجبر. ولعدم وجود دراسات على المستوى المحلي – في حدود علم الباحث – حول المعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة، جاءت هذه الدراسة لتسلط الضوء على هذا المفهوم لما له من دور أساسي في التعلم اللاحق وبخاصة في تعلم الجبر.

كما أن للدراسة الحالية أهمية عملية؛ تتمثل في توفير أداة يمكن أن يستخدمها المعلمون في تقييم فهم طلبتهم لإشارة المساواة. كما توفر الأشكال المتنوعة للمسائل الحسابية التي تظهر في هذه الأداة، مصدرا لتطوير أوراق العمل التي يستخدمها المعلمون حتى لا تكون مجرد صورة أخرى للمسائل التي تظهر في كتاب الطالب.

التعريفات الإجرائية:

تشتمل هذه الدراسة على المصطلحات الآتية:

القدرة على حل المسائل الحسابية: تعني القدرة على إعطاء إجابات صحيحة للمسائل الحسابية وتبرير هذه الإجابات، وتتحدد هذه القدرة بالعلامة التي يحصل عليها الطالب في اختبار تحصيلي يتضمن مسائل حسابية أعدَّ لأغراض الدراسة.

المسائل الحسابية: هي مسائل عددية تتكون من أعداد وعملية حسابية واحدة (+، – ، ×) على الأقل وإشارة المساواة.

المعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة: هناك معنيان لفهم إشارة المساواة:

- فهم إشارة المساواة **كعملية:** وهو أدنى مستويات الفهم لإشارة المساواة والذي يعني الحاجة إلى إجراء حسابات وكتابة نتيجة بعد إشارة المساواة مباشرة.
- فهم إشارة المساواة **كعلاقة:** هو مستوى متطور لفهم إشارة المساواة ويعني إمكانية الحكم بتساوي الطرفين (الأيمن والأيسر) دون الحاجة لإجراء حسابات.

حدود الدراسة ومحدداتها: وتتمثل حدود الدراسة ومحدداتها فيما يأتي:

الحدود الموضوعية: وتتمثل بالمعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة لدى طلبة الصف السادس الأساسي وأثرها في مقدرتهم على حل المسألة الحسابية.

الحدود البشرية: اقتصرت هذه الدراسة على جميع طلبة الصف السادس الأساسي في المدارس الحكومية التابعة لمديرية التربية والتعليم في لواء قصبة إربد، للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨م.

الحدود المكانية: تم تطبيق الدراسة الحالية في المدارس الحكومية التابعة لمديرية التربية والتعليم في لواء قصبة إربد، للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨م.

الحدود الزمانية: تم تطبيق هذه الدراسة خلال الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي٢٠١٧/٢٠١٨م.

محددات الدراسة: يعتمد تعميم نتائج هذه الدراسة على عينة الدراسة والأداة المستخدمة لجمع البيانات، ومقدار ما تتمتع به من خصائص سيكومترية مقبولة (الصدق، والثبات).

الأدب النظري والدراسات السابقة:

يُطوِّر الطلبة المعاني المختلفة لإشارة المساواة من خلال العبارات الرياضية في كتب الرياضيات، وتلك التي يتم عرضها عليهم داخل غرفة الصف (McNeil et al., 2006)، وتشير العديد من الدراسات (Falkner, Levi, & Carpenter, 1999; Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998) إلى أن المناهج التقليدية تركز بشكل كبير على تقديم إشارة المساواة كعملية تماما مثل (+،×، − ، ÷) بسبب تكرار العبارة الرياضية (أ + **ب** = □) التي تتطلب إجراء عملية حسابية وكتابة النتيجة بعد إشارة المساواة مباشرةً.

ويُعدُّ التركيز على فهم إشارة المساواة كعملية (أحسب، الناتج هو) مهما في دراسة الرياضيات في المرحلة الأساسية الأولى، فهو ينمي لدى الطلبة الحس العددي، وينمي مهاراتهم في إجراء العمليات الحسابية؛ لكن ومع تقدم الطالب عبر الصفوف والانتقال من موضوع الحساب إلى الجبر تصبح الحاجة أكثر إلحاحا للتركيز على معنى آخر أكثر أهمية، وهو معنى إشارة المساواة كعلاقة تربط بين مقدارين على طرفيها.

وتعني إشارة المساواة كعلاقة أن المقدارين على كلا طرفيها متماثلان في الكمية (Carpenter et al., 2003; Knuth et al., 2006; McNeil, Fyfe, Petersen, Dunwiddie, & Brletic-Shipley, 2011; Rittle-Johnson, Matthews, Taylor, & McEldoon, 2011)، وهو في الحقيقة معنى مهم يصور إشارة المساواة كما نستخدمها في حياتنا اليومية (صرف النقود، نفس الطول، نفس الوزن،...) (Bickmore-Brand, 1990; Rivera, 2006)، ويساعد هذا المعنى على الانتقال السلس من الحساب إلى الجبر، حيث يمثل هذا الانتقال التحدي الأكبر بالنسبة للمعلم، ويكون في كثير من الأحيان سببًا في تدني تحصيل الطلبة في مادة الرياضيات كونها أصبحت غير مألوفة بالنسبة لهم والمعاني المتضمنة فيها لا تشبه ما كانوا يدرسونه في السابق إلى حد كبير.

فالطلبة الذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعملية لا يتقبلون عبارات رياضية لا تحتاج إلى حساب مثل ٥ = ٥ أو عبارات تظهر عملية حسابية في كلا طرفيها مثل ٤ + ٥ = ٧ + ٢ وغالبًا يقومون بتحويلها إلى مسائل تظهر فيها العمليات الحسابية في جهة واحدة ويكتبون نتيجة في الجهة الأخرى فمثلًا يحولون المسألة $3 + 5 = 5 + 3$ إلى $3 + 5 + 5 + 3 = 16$ و المسألة ٥ = ٥ إلى $0 + 5 = 5$ أو $5 - 5 = 0$ (Carpenter et al., 2003).

إن مفهوم المساواة ومعنى رمز إشارة المساواة كعلاقة لا يتحقق لدى الطلبة بسهولة كما يعتقد العديد من المعلمين، فإشارة المساواة من الرموز الرياضية التي يصعب فهمها بشكل كامل لذا من المهم التأكد من فهم الطلبة لهذا الرمز قبل دراسة الجبر (Falkner et al., 1999; Knuth et al., 2006)؛ ففي الدراسة التي قام بها براون (Brown, 2010) لاحظ أن ضعف طلبته في الجبر ربما يكون مرتبطا بكيفية فهمهم لإشارة المساواة. ولتطوير فهم طلبته لإشارة المساواة كعلاقة وربطه بالجبر استخدم بداية ميزان حقيقي لإظهار التوازن بين الكميات المختلفة،

ثم انتقل إلى مسائل جبرية تحوي رسما لميزان يفصل بين مقدارين كبديل لإشارة المساواة، وأخيرا قام باستبدال رسم الميزان بإشارة المساواة والتأكيد على أن لهما نفس المعنى، وكان لهذا الربط أثراً بالغاً في تحسين أداء طلبته في حل المسائل الجبرية.

وفي الدراسة التي أجراها نث ورفاقه (Knuth et al., 2006) على مجموعة من طلبة المرحلة المتوسطة للكشف عن طبيعة فهمهم لإشارة المساواة وعلاقة نوع هذا الفهم في قدرتهم على حل المسائل الجبرية، أظهرت النتائج أنهم يفتقرون لفهم متطور لإشارة المساواة، كما كشفت عن وجود علاقة بين فهم إشارة المساواة كعلاقة وبين قدرة الطلبة ونجاحهم في حل المعادلات الجبرية.

ولا تعني معرفتنا أن الفهم الخاطئ لإشارة المساواة يرتبط بفهمها كعملية وليس كعلاقة إمكانية علاج سوء الفهم من خلال توضيح هذا المعنى للطلبة (Carpenter et al., 2003). فالفهم الجيد لهذا الرمز يتطلب وقتًا لبناء هذا الفهم، كما يتطلب التركيز على إشارة المساواة دون إجراء أي عملية حسابية ويمكن تحقيق ذلك من خلال أمثلة كثيرة تتطلب الحكم على تساوي طرفين من خلال وضع إشارة (√) أو (x) دون إجراء أية حسابات (Falkner et al., 1999).

ويؤثر الأسلوب الذي يستخدمه المعلم في شرح حل المسائل الحسابية والمعادلات وكيفية صياغته للخطوات التي تساعد الطلبة في حلها دورًا مهمًا في المعنى الذي يطوّره الطلبة لإشارة المساواة. فمثلًا عندما يقول المعلم "علينا إجراء نفس العملية على طرفي المساواة " دون توضيح سبب اختيار هذا الإجراء، يتولد لدى الطلبة معرفة إجرائية في كيفية التعامل مع المسائل التي تحوي إشارة المساواة تساعدهم في إيجاد نتيجة دون أن يكون لديهم فهما حقيقيا لسبب اختيار هذا الإجراء (Gray & Tall, 2007).

فعند انتقال الطلبة لدراسة الجبر وحل المعادلات الخطية، على المعلم التركيز على قيامهم بتبرير كل خطوة يقومون بها (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) وهذا يتطلب بطبيعة الحال التنويع في الأمثلة والمواقف التي تعرض عليهم لتجنب الملل من استخدام نفس التبريرات في كل مرة. كما أن على المعلم التركيز على فكرة الحفاظ على التوازن على طرفي

إشارة المساواة وقيام الطلبة باختيار إجراءات مناسبة تضمن الحفاظ على هذا التوازن، مما يساعد في تنمية قدرة الطلبة على تطوير استراتيجيات خاصة بهم في حل المسائل بدلًا من استظهار سلسلة من الإجراءات التي تقودهم إلى حلول.

ولا يعدُّ فهم إشارة المساواة كعلاقة تطوراً طبيعياً لفهمها كعملية، بل يحتاج هذا التطور إلى جهد كبير وفق المخطط المعرفي لفهم إشارة المساواة الذي طوَّره ريتل – جونسون ورفاقه (Rittle-Johnson et al., 2011)، حيث يشير هذا المخطط إلى أن فهم إشارة المساواة له أربعة مستويات، يمثل المستوى الأول فهما لإشارة المساواة كعملية بحتة يمكن أن يتطور لاحقا إلى فهمها كعلاقة في المستوى الثالث، ويمر هذا التطور بمرحلة انتقالية (المستوى الثاني) يتذبذب فيها فهم الطلبة لإشارة المساواة بين المعنيين (كعملية، كعلاقة) تتطلب تعريضهم لمسائل حسابية لا تركز على إجراء الحسابات، ويمثل المستوى الرابع فهما متعمقا لإشارة المساواة كعلاقة، تعتمد على معرفة الطالب بخصائص العمليات الحسابية للحكم على تساوي مقدارين دون الحاجة إلى إجراء حسابات.

وقد توصلت العديد من الدراسات (Carpenter et al., 2003; Koehler, 2004) إلى أن طلبة المرحلة الأساسية الأولى (بمن فيهم طلبة الصف الأول الأساسي) قادرين على تكوين فهم لإشارة المساواة كعلاقة إذا ما تم تقديمها لهم بطريقة مناسبة. وهذا يتعارض مع ما كان يعتقد سابقا حول محدودية قدرة طلبة المرحلة الأساسية الأولى على تطوير فهم لإشارة المساواة كعلاقة (Falkner et al., 1999).

ولدراسة مدى أهمية تكوين فهم لإشارة المساواة كعلاقة، قام لي ودينج وكابرارو وكابرارو (Li, Ding, Capraro, & Capraro, 2008) بمقارنة أداء مجموعتين من الطلبة على حل المعادلات الحسابية في سنتهم الأخيرة في المرحلة الأساسية الأولى (قبل دراستهم الجبر). المجموعة الأولى كانت من الطلبة الصينيين حيث إن المناهج الصينية تُعرِّف إشارة المساواة، ويتم شرحها أولا باستخدام الأشكال والألوان وغيرها جنبا إلى جنب مع العلاقات الأخرى (<، >) قبل أن يتم تدريس العمليات الحسابية والمعادلات. والمجموعة الثانية كانت من طلبة الولايات المتحدة الأمريكية، حيث تركز المناهج الأمريكية على مسائل نمطية (مقدار = نتيجة) حتى أنَّ أدلة المعلمين لا تتضمن تعريفا لإشارة المساواة. كانت النتيجة صادمة حيث إنَّ ٩٨% من الطلبة الصينيين نجحوا في حل المعادلات

وبرَّروا إجاباتهم بشكل صحيح، في حين أن ٢٨% فقط من الطلبة الأمريكيين نجحوا في ذلك. وعزى الباحث هذا الفرق الكبير في الأداء إلى الاختلاف في كيفية تناول مفهوم إشارة المساواة في منهاج الرياضيات في كل من البلدين.

وتعد نتائج الدراسة السابقة دليلا حياً على أهمية تعريف إشارة المساواة، والتنويع في طرح المسائل الحسابية في المرحلة الأساسية الأولى، وتقديمها بصورة تعبر عن المعاني المختلفة لإشارة المساواة. ويمكن أن يتحقق ذلك بطرح مسائل تظهر فيها العمليات الحسابية في كلا طرفيها (مقدار=مقدار) مثل: $5+4=\_+6$، $8\times3-4=6\times\square+2$ ومع تعمق فهم الطلاب لإشارة المساواة يمكن طرح جملا مفتوحة تحوي مجهولا في كلا طرفيها، وهي تتشبه إلى حد ما المسائل الجبرية التي سيدرسها لاحقا مثل: $2\times\square+4=10-\square$ شريطة أن يستخدم نفس العدد في كلا الطرفيين، ويتم حل مثل هذه المسائل عادة بالتجريب (المحاولة والخطأ).

ومع زيادة التركيز على الشكل الأخير من المسائل السابقة (وجود المجهول في كلا طرفي المساواة) يبرز معنى آخر لفهم إشارة المساواة كعلاقة غير المعنى الشائع والذي يعني أن المقدارين على طرفي إشارة المساواة متماثلان وهذا المعنى الجديد هو "التعويض". ويرى جونز ورفاقه (Jones, I. et al., 2012) أن التعويض هو مكوِّن آخر مختلف لفهم إشارة المساواة كعلاقة ولا يقل أهمية عن المعنى الشائع؛ فإشارة المساواة التي تظهر في القوانين الرياضية تحمل معنى التعويض.

ويعني التعويض إمكانية استبدال أي من المقدارين – على طرفي إشارة المساواة– بالآخر، ويظهر هذا المعنى عند التدرب على الحساب الذهني في الجمع أو لتسهيل الحسابات في المسائل العددية، كما يلي:

$$56 + 74 = 6 + 50 + 4 + 70 = (6 + 4) + 50 + 70 = 10 + 50 + 70 = 130$$

ويظهر معنى التعويض بشكل أكبر عند دراسة حل المعادلات الجبرية الآنيَّة كما في المثال التالي: $x - y = 5 \ \& \ x = 2y$

وتؤكد العديد من الدراسات على أهمية الانتقال من فهم إشارة المساواة كعملية إلى فهمها كعلاقة بين مقدارين (Carpenter et al., 2003; Molina & Ambrose, 2008; Pirie & Martin, 1997; Saenz-Ludlow & Walgamuth, 1998) ويتم ذلك عادة بعرض مسائل حسابية بصيغ وبنى متعددة

تتطلب منهم الحكم على صحتها. وتبنى هذه المسائل اعتمادا على خصائص العمليات الحسابية على جانبي إشارة المساواة (تبديل، تجميع، ...) (Carpenter et al., 2003; Pirie & Martin, 1997)، ويكون الهدف من الاعتماد على هذه الخصائص أن يرى الطالب التماثل على طرفي إشارة المساواة دون الحاجة إلى حساب كل من الطرفين ومن ثَّم مقارنتها (Jones, Inglis, Gilmore, & Evans, 2013)، فمثلا عند عرض المسألة ٣ + ٤ = ٤ + ٣ فإن الطالب الذي يعرف خاصية التبديل سيستنتج أنها صحيحة دون الحاجة إلى إجراء الحسابات، وبالتالي يتم التركيز على معنى إشارة المساواة كعلاقة وليس كعملية.

لكن من جهة أخرى نجد أن العديد من الطلبة في المرحلة الأساسية الأولى غير قادرين على إصدار حكم بتساوي مقدارين دون إجراء حسابات، وهذا يعود إلى ضعف المعرفة بالعمليات الحسابية وخصائصها (Carpenter et al., 2003; Falkner et al., 1999)، وليس إلى صعوبة مفهوم إشارة المساواة كعلاقة وعدم ملاءمته لمستوى الطلبة.

وقد قامت مولينا وأمبروس (Molina & Ambrose, 2008) بدراسة هدفت لتطوير إستراتيجية يمكن استخدامها في تطوير فهم طلبة الصف الثالث الأساسي لإشارة المساواة كعلاقة ودراسة تأثير ذلك في قدرتهم على تحليل العبارات الرياضية. حيث ركزت الإستراتيجية على استخدام جمل عددية مفتوحة بصيغ غير مألوفة لدى الطلبة تركز على الاستفادة من خصائص العمليات الحسابية للتوصل إلى حلول دون إجراء حسابات. وقد أظهرت نتائج الدراسة أهمية مثل هذه المسائل في تطوير فهم أفضل لإشارة المساواة، كما أظهرت أنه ومع تعمق فهم الطلبة لإشارة المساواة تزيد قدرتهم على تحليل العبارات الرياضية مما يعزز قدرتهم على التفكير الجبري.

وفيما يتعلق بالصعوبات التي تواجه الطلبة في فهم إشارة المساواة، فقد أشار فولكنر ورفاقه (Falkner et al., 1999) إلى أن الطلبة يبدون فهما أفضل لمفهوم المساواة عندما يتعاملون مع مواقف حياتية وحتى عند محاولتهم حل مسائل لفظية، في حين يظهر لديهم سوء فهم أكبر عندما يتعاملون مع معادلات تحوي رموزًا ومتغيرات، مما يشير إلى أن سوء فهم إشارة المساواة قد يرتبط بكيفية استخدام رمز المساواة وليس في إدراك معنى مفهوم المساواة.

وللبحث في أسباب أخرى لسوء فهم إشارة المساواة وعدم تطوير الطلبة لفهمها كعلاقة كشفت نتائج دراسة جونز وبرات (Jones & Pratt, 2006) عن أن أحد الأسباب الرئيسية يرتبط بتدريس موضوع الحساب للصفوف الأولى في سياقات تعتمد بشكل أساسي على الورقة والقلم وتوصلت أيضًا إلى أن استخدام التكنولوجيا والبيئات التفاعلية الإلكترونية يحقق فهمًا أفضل لإشارة المساواة.

وفي دراسة هاتيكودر وألي_بالي (Hattikudur & Alibali, 2010) للكشف عن فاعلية تدريس إشارة المساواة من خلال مقارنتها مع رموز العلاقات الأخرى (أكبر من >، أصغر من <). تكونت عينة الدراسة من ثلاث مجموعات من الصفين الثالث والرابع، المجموعة الأولى درست إشارة المساواة وقارنوها مع إشارة أكبر من (>) وأصغر من (<) وطلبة المجموعة الثانية درسوا إشارة المساواة دون مقارنتها، بينما المجموعة الثالثة استخدمت كمجموعة ضابطة لم تدرس إشارة المساواة وتم الاكتفاء بما يعرفه الطلبة مسبقًا عن هذا الرمز. وقد أظهرت نتائج الدراسة أن الطلبة الذين درسوا إشارة المساواة من خلال مقارنتها مع رموز العلاقات الأخرى طوَّروا فهما أفضل لإشارة المساواة كما أن قدرتهم على حل المعادلات كانت أفضل بكثير.

وخلاصة القول، إن جميع الدراسات السابقة تؤكد على أهمية أن يتكوَّن لدى الطلبة فهم متعمق لإشارة المساواة قبل دراسة الجبر، وأن هذا الفهم يتطلب التنويع في السياقات التي تعرض فيها إشارة المساواة، كما يتطلب التنويع في صيغ وبنى المسائل العددية والجمل المفتوحة التي تظهر في كتب الرياضيات المدرسية والتي تعرض على الطلبة في الغرف الصفية وأن الهدف الأساسي هو أن يفهم الطلبة أن إشارة المساواة تعني: ١) تماثل أشياء: نفس الطول، نفس الوزن، صرف النقود،...٢) تماثل كميات: $x + 5 = (x + 2) + 3$ ٣) تماثل عبارتين عدديتين: $5 + 4 = 4 + 5$

الطريقة والإجراءات:

مجتمع الدراسة وعينتها:

تكوَّن مجتمع الدراسة من طلبة الصف السادس الأساسي في محافظة إربد في الفصل الدراسي الأول ٢٠١٨/٢٠١٧م. أما عيِّنة الدراسة فقد تم اختيار خمس مدارس بالطريقة العشوائية الطبقية، منها مدرستان تعتمدان أوراق العمل في

تدريس الرياضيات في المرحلة الأساسية الأولى إحداهما تضم شعبة واحدة للصف السادس والأخرى تضم شعبتين، وثلاث مدارس لا تعتمد أوراق العمل في تدريس مادة الرياضيات في المرحلة الأساسية الأولى اختير من كل منها شعبة واحدة بطريقة عشوائية. وقد تألفت عينة الدراسة بداية من ٢٥٣ طالبا وطالبة، منهم ١١٩ من مدارس تعتمد أوراق العمل و ١٣٤ من مدارس لا تعتمد أوراق العمل.

وبعد تطبيق أداة الدراسة تم استثناء ٣ من طلبة المدارس التي تعتمد أوراق العمل، و ١٣ من طلبة المدارس التي لا تعتمد أوراق العمل، بسبب عدم إجابتهم (أو الإجابة غير واضحة) على فقرة تكشف عن طبيعة فهمهم لإشارة المساواة. وبذلك تألفت العينة بصورتها النهائية من ٢٣٧ طالبا وطالبة، ١١٦ منهم من مدارس تعتمد أوراق العمل و ١٢١ من مدارس لا تعتمد أوراق العمل.

أداة الدراسة:

للإجابة عن أسئلة الدراسة، قام الباحث بتطوير اختبار يتضمن مجموعة من الفقرات المستقاة من توجيهات الدراسات السابقة (Falkner et al., 1999; Hunter, 2007; McNeil et al., 2006; Warren, 2003) لشكل المسائل الحسابية التي يتطلب حلها فهم الطلبة لإشارة المساواة كعلاقة، ومن جهة أخرى يمكن استخدامها لقياس هذا الفهم. كما يتضمن الاختبار مجموعة أخرى من الفقرات المطورة خصيصا لأغراض هذه الدراسة.

وللإجابة عن السؤال الأول استخدم الباحث فقرة تنص على " **لو غاب صديقك عن بعض حصص الرياضيات، ووجد صعوبة في فهم الرمز** " = " ، **فكيف تساعده على فهمه؟**" وهنا تتطلب الإجابة صياغة الطالب لتعريف الرمز " = " ، كما يمكن أن يستخدم الأمثلة في توضيحه. وبعدها يتم تحليل إجابة الطالب وتصنيفها ضمن ثلاث فئات: فهم إشارة المساواة كعملية، فهمها كعلاقة، غير ذلك.

ويتم تصنيف إجابة الطالب على أنها فهم لإشارة المساواة كعملية إذا تضمنت معنى يفيد بضرورة إجراء الحسابات وكتابة نتيجة. بينما يتم تصنيف إجابته على أنها فهم لإشارة المساواة كعلاقة إذا تضمنت معنى يفيد أن المقدارين على طرفي إشارة المساواة متكافئان. في حين يتم تصنيف إجابة الطالب "غير ذلك" إذا ترك الفقرة دون إجابة أو كانت إجابة غير واضحة.

وفي حال كانت إجابة الطالب تتضمن كلا المعنيين (كعلاقة، كعملية) يتم تصنيف إجابته في فئة فهم إشارة المساواة كعلاقة، حسب مخطط ريتل–جونسون (Rittle-Johnson et al., 2011) لفهم إشارة المساواة. حيث إنَّ فهم إشارة المساواة كعملية يسبق فهمها كعلاقة، ومن الطبيعي أن يمتلك الطالب كلا المعنيين، لكنه يصنف حسب المستوى الأعلى الذي وصل إليه. ويبين الجدول (١) بعض الأمثلة على استجابات الطلبة وكيفية تصنيفها.

جدول (١)

بعض الأمثلة على المعاني المتضمنة في استجابات الطلبة وكيفية تصنيفها

نوع الفهم لإشارة المساواة	بعض المعاني في استجابات الطلبة لفهم إشارة المساواة
كعملية	الجواب هو، احسب أو جد الناتج، رمز يربط بين المسألة وإجابتها.
كعلاقة	أن الكميتين على طرفي هذا الرمز متساويتان، أن كلا الطرفين لهما نفس القيمة، أن شيئا ما يساوي شيئا آخر، أنه يمكن استبدال أحد الطرفين بالآخر، أنه يمكن تبديل أماكن الطرفين مع بعضهما.
غير ذلك	يساوي، نهاية المسألة

وتتطلب الإجابة عن السؤالين (الثاني والثالث) قياس قدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية وهذا ما توفره الفقرات الست المتبقية في الاختبار، حيث تتضمن أشكالا متنوعة من الفقرات التي أوصت بها الدراسات ذات الصلة بالموضوع.

صدق الأداة:

قام الباحث بعرض الأداة (الاختبار) بصورته الأولية على مجموعة من المحكمين في جامعة اليرموك، لمعرفة مدى مناسبتها من حيث الصياغة، والعدد، وقياس قدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية، وتحديد الوقت اللازم، وبعد الأخذ بآرائهم وبما يتناسب مع هدف هذه الدراسة، تم إخراج الأداة (الاختبار) بصورتها النهائية كما في الملحق (١).

وفيما يتعلق بطبيعة المسائل الحسابية في الاختبار، وعدم التطرق للمسائل اللفظية والاكتفاء بالمسائل العددية، فإن السبب يعود إلى تقدير الباحث والاستئناس بآراء المحكمين، حيث يتطلب حل المسألة اللفظية تمثيلها عدديا قبل حلها، وتختلف قدرة الطلبة على تمثيل المسألة اللفظية باختلاف موقع المطلوب

(Knuth et al., 2006)، وبالتالي يتطلب حل المسألة قدرة (عامة) في الرياضيات، وليس فقط فهم إشارة المساواة كعلاقة.

ثبات الأداة:

قام الباحث بتطبيق الأداة (الاختبار) على عينة تجريبية تضم ٤٣ طالبا وطالبة من طلبة الصف السادس الأساسي من مجتمع الدراسة، ومن خارج عينتها. وتم حساب معامل ثبات الاتساق الداخلي (كرونباخ α) لكامل الاختبار حيث كانت $\alpha = 0.86$ وتعد هذه القيمة مقبولة لأغراض هذه الدراسة.

تصميم الدراسة والأساليب الإحصائية:

استخدم في هذه الدراسة المنهج الوصفي التحليلي، كما استخدمت الأساليب الإحصائية الآتية: معامل ثبات الاتساق الداخلي (كرونباخ α) للتحقق من ثبات أداة الدراسة، المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لوصف علامات الطلبة، اختبار χ^2 لحسن المطابقة لمقارنة النسب، اختبار ليفنز (Levene's) لتجانس علامات الطلبة داخل المجموعات، بالإضافة إلى تحليل التباين الثنائي (Two-Way ANOVA) للإجابة عن السؤالين الثاني والثالث.

إجراءات الدراسة:

تم تنفيذ الدراسة في مراحلها الثلاث وفق الخطوات الآتية:

المرحلة الأولى: قبل تطبيق الاختبار:

- التقى الباحث بمعلمي الرياضيات لصفوف الطلبة ضمن عينة الدراسة للنقاش حول مستويات طلبتهم، وكيفية استخدامهم للرمز " = " داخل الغرفة الصفية، وبأي معنى (كعملية، كعلاقة) وكيف يقرؤون الرمز " = " في الغالب (يساوي، يعطي،.....)، كما قام الباحث بالإطلاع على بعض أوراق العمل التي يستخدمها المعلمون في تدريسهم.
- تم الاتفاق على آلية تطبيق الاختبار والتعليمات وكيفية الرد على أسئلة الطلبة أثناء تطبيق الاختبار.

المرحلة الثانية: أثناء تطبيق الاختبار:

- لم يكن للباحث أي احتكاك أو تفاعل مباشر مع أفراد عينة الدراسة، فقد قام معلمو الرياضيات أنفُسهم بتطبيق الاختبار على طلبتهم في ظروف اختبار عادية. حيث أخبروا طلبتهم أنَّ هذا الاختبار مهم ويقيس قدراتهم في الرياضيات، وأن عليهم بذل كل ما في وسعهم للإجابة عن أسئلته. كما أن

المعلمين لم يصارحوا الطلبة بأن هذا الاختبار لأغراض بحثية لسببين؛ الأول: حتى تكون هناك جدية لدى الطلبة في الإجابة، والثاني: الرغبة في معرفة مستوى فهم طلبتهم لإشارة المساواة لمساعدتهم مستقبلا في تطوير هذا الفهم.

المرحلة الثالثة: بعد تطبيق الاختبار:

- قام الباحث بتجميع أوراق الاختبار، وتمييزها بحرف " W " في حال كانت من مدارس تعتمد أوراق العمل، وبدون تمييز إذا كانت لطلبة من مدارس لا تعتمد أوراق عمل.
- تم تحليل إجابات طلبة المجموعتين (مع أوراق عمل، بدون أوراق عمل) على الفقرة السابعة في الاختبار، وتصنيفهم بناءً على هذه الإجابات في ثلاث فئات: فهم إشارة المساواة كعلاقة، فهم إشارة المساواة كعملية، غير ذلك.
- تم تصحيح بقية إجابات الطلبة، ورصد نتائجهم، وتحليلها للإجابة عن السؤالين الثاني والثالث.

نتائج الدراسة:

أولا: النتائج المتعلقة بالإجابة عن السؤال الأول والذي نص على "ما المعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة لدى طلبة الصف السادس الأساسي؟". للإجابة عن هذا السؤال قام الباحث بتحليل إجابات الطلبة على الفقرة السابعة في الاختبار والتي تنص على " **لو غاب صديقك عن بعض حصص الرياضيات، ووجد صعوبة في فهم الرمز** "=" ، **كيف تساعده على فهم هذا الرمز؟**" وتصنيف إجاباتهم في ثلاث فئات (كعملية، كعلاقة، غير ذلك).

ولتسهيل عرض نتائج السؤال الأول واستخدامها لاحقا في السؤال الثاني؛ قام الباحث بتصنيف الطلبة على هذه الفئات الثلاث لمجموعتي المدارس التي تعتمد على أوراق العمل بشكل واسع والتي لا تعتمد على أوراق العمل كل على حدة. كما يظهر في الجدول (٢).

جدول (٢) توزيع طلبة المجموعتين على الأبعاد الثلاثة.

طبيعة النشاط	فهم إشارة المساواة			المجموع
	كعملية	كعلاقة	غير ذلك	
بدون أوراق عمل	٩٣	٢٨	١٣	١٣٤
مع أوراق عمل	٦٦	٥٠	٣	١١٩
المجموع	١٥٩	٧٨	١٦	٢٥٣

يلاحظ من الجدول (٢) أن عدد الطلبة الذين يعتمد تدريسهم على أوراق العمل ولديهم فهم لإشارة المساواة كعلاقة أكبر بكثير من عددهم في المجموعة التي لا تعتمد على أوراق العمل. كما يظهر أن عدد الطلبة الذين كان لديهم مشكلة في التعبير الكتابي أو لم يكتبوا إجابة للفقرة السابعة من المجموعة الثانية أقل بكثير (٢٥ %) منهم في المجموعة الأولى. وهذا قد يشير إلى أهمية استخدام أوراق العمل في تدريس الرياضيات.

وبحساب نسبة الطلبة الذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعلاقة مقابل فهم إشارة المساواة كعملية في كلا المجموعتين، يمكن أن نكوِّن صورة أفضل للمعاني التي يكوِّنها الطلبة لإشارة المساواة. والجدول (٣) يبين هذه النسب.

جدول (٣) النسبة المئوية لفهم الطلبة إشارة المساواة

كعملية أو كعلاقة من كلا المجموعتين.

طبيعة النشاط	فهم إشارة المساواة	
	كعملية	كعلاقة
بدون أوراق عمل	٧٧%	٢٣%
مع أوراق عمل	٦٣%	٣٧%

يلاحظ من جدول (٣) أن ٣٧% فقط من طلبة الصف السادس في المجموعة الثانية (مع أوراق عمل) لديهم فهم لإشارة المساواة كعلاقة، مع أنهم يتدربون على أنشطة متنوعة في أوراق عمل، إلا أن هذه النسبة تعد مرتفعة جدا مقارنة مع ٢٣% فقط من طلبة المجموعة الأولى (بدون أوراق عمل) الذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعلاقة كما يَظهر في الجدول (٤)، حيث إن قيمة الدلالة الإحصائية (0.001) أقل من مستوى الدلالة الإحصائية ($\alpha = 0.05$) وهذا يعني أن طبيعة الفهم لإشارة المساواة (كعملية، كعلاقة) يعتمد على طبيعة النشاط (بدون أوراق عمل، مع أوراق عمل).

جدول (٤)

اختبار χ^2 للنسبة المئوية لفهم الطلبة إشارة المساواة من كلا المجموعتين.

	القيمة	درجات الحرية	الدلالة الإحصائية
χ2	10.689	1	*.001
المجموع	237		

*ذو دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة (α = ٠.٠٠٥)

وبتجميع طلبة المجموعتين معا لحساب النسبة الكلية لفهم إشارة المساواة (كعملية، كعلاقة) يتبين أن ٣٢% فقط من جميع أفراد العينة يكونون فهما لإشارة المساواة كعلاقة. وهذه النسبة متدنية جدا وتسترعي الانتباه، كما سيتم مناقشتها لاحقا.

ثانيا- النتائج المتعلقة بالإجابة عن السؤال الثاني الذي نص على: "**هل تختلف قدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية باختلاف المعاني المتعلقة بفهم إشارة المساواة (كعملية، كعلاقة)؟**".

للإجابة عن هذا السؤال اعتمد الباحث نتائج السؤال الأول في تقسيم الطلبة ضمن عينة الدراسة إلى فئتين حسب فهمهم لإشارة المساواة (كعملية، كعلاقة) ضمن كل مجموعة (مع أوراق عمل، بدون أوراق عمل). وقام بتصحيح أوراق الطلبة على الفقرات الست المتبقية لكل مجموعة فرعية، معتمدا طريقة التصحيح التي تظهر في الملحق (١). والجدول رقم (٥) يظهر وصفا لعلامات الطلبة، وكيفية توزيعها ضمن المجموعات الفرعية الأربع.

جدول (٥)

ملخص علامات الطلبة، وتوزيعها على مستويات المتغيرين المستقلين

فهم أشارة المساواة (كعملية، كعلاقة)	طبيعة الأنشطة الصفية	الوسط الحسابى	الانحراف المعياري	عدد الطلبة
فهم إشارة المساواة كعملية	بدون أوراق عمل	14.8710	3.35969	93
	مع أوراق عمل	16.9091	3.55063	66
	المجموع	15.7170	3.57405	159
فهم إشارة المساواة كعلاقة	بدون أوراق عمل	20.3929	3.55214	28
	مع أوراق عمل	26.7600	3.35979	50
	المجموع	24.4744	4.58888	78
المجموع	بدون أوراق عمل	16.1488	4.11838	121
	مع أوراق عمل	21.1552	5.99508	116
	المجموع	18.5992	5.69453	237

وللكشف عن وجود فروق حقيقية في علامات الطلبة بين هذه المجموعات؛ استخدم الباحث تحليل التباين الثنائي، بعد التأكد من تحقق جميع الافتراضات التي يقوم عليها هذا التحليل. حيث إنَّ طريقة تسكين أفراد العينة في المجموعات الفرعية يضمن استقلاليتها، كما أنه استنادا إلى نظرية النهاية المركزية (Central limit theorem) فلا حاجة إلى التأكد من التوزيع الطبيعي لعلامات المتغير التابع كون حجم العينة كبير (٢٣٧)، أمّا فيما يتعلق بتجانس التباين، فقد استخدم الباحث اختبار (Levenes test). كما في الجدول (٦).

جدول (٦)

اختبار ليفنز (Levene's Test) لتجانس علامات الطلبة داخل المجموعات

قيمة ف	درجات الحرية ١	درجات الحرية ٢	الدلالة الإحصائية
.236	3	233	.871

يلاحظ من الجدول (٦) أن قيمة الدلالة الإحصائية (٠.٨٧١) أكبر من ($\alpha = 0.05$) وهذا يعني عدم رفض الفرضية الصفرية، بمعنى أن شرط التجانس متحقق. وبتحقق الشروط الثلاثة يمكننا استخدام تحليل التباين الثنائي، ويظهر الجدول (٧) نتائج هذا التحليل.

جدول (٧) نتائج تحليل التباين الثنائي للمتوسطات الحسابية لدرجات الطلبة على اختبار القدرة على حل المسألة الحسابية تبعا لمتغيري نوع فهم إشارة المساواة (كعملية، كعلاقة) وطبيعة الأنشطة (مع أوراق عمل، بدون أوراق عمل)

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	قيمة ف	الدلالة الإحصائية
نوع الفهم	2895.458	1	2895.458	245.172	*0.000
أوراق العمل	865.594	1	865.594	73.294	*0.000
نوع الفهم * أوراق العمل	229.610	1	229.610	19.442	*0.000
الخطأ	2751.705	233	11.810		
المجموع	89638.000	237			

*ذو دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة (α = ٠.٠٥)

تظهر نتائج التحليل في الجدول (٧) وجود فروق حقيقية (ذات دلالة إحصائية) في قدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية تعزى لنوع الفهم لإشارة المساواة. حيث أن قيمة الدلالة الإحصائية (.000) أقل من مستوى الدلالة الإحصائية (α= 0.05). وهذا يعني أن قدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية تختلف باختلاف فهمهم لإشارة المساواة (كعملية، كعلاقة). ولوجود مستويين فقط للمتغير المستقل (فهم إشارة المساواة) فلا حاجة لعمل مقارنات بعدية، ويكفي المقارنة بين المتوسطات الحسابية، وبالرجوع إلى الجدول (٥) نجد أن متوسط علامات الطلبة الذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعلاقة أعلى.

ثالثا- النتائج المتعلقة بالإجابة عن السؤال الثالث الذي نص على " **هل هناك أثر ذو دلالة إحصائية للتفاعل بين نوع الفهم لإشارة المساواة (كعملية، كعلاقة) والأنشطة الصفية (التركيز على أوراق العمل، بدون أوراق عمل) في قدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية؟**"

نلاحظ من الجدول (٧) وجود تفاعل بين متغيري الأنشطة الصفية ونوع الفهم، حيث إنَّ قيمة الدلالة الإحصائية للتفاعل (0.000) وهي أقل من مستوى الدلالة الإحصائية (α= 0.05)، وهذا يعني أن طبيعة فهم إشارة المساواة كعلاقة يختلف باختلاف الأنشطة الصفية، حيث إنَّ الطلبة الذين يدرسون بالتركيز على أوراق العمل يكوِّنون فهما أفضل لإشارة المساواة كعلاقة كما يظهر من نسبتهم ونتائجهم في الجدولين (٣) و(٥) على الترتيب. ويظهر هذا التفاعل أيضا في

طبيعة فهم إشارة المساواة كعملية، حيث إنَّ نسبة الطلبة الذين يدرسون باستخدام أوراق العمل ويمتلكون فهما لإشارة المساواة كعملية، أقل من نسبتهم في المجموعة التي لا تركز على أوراق العمل.

مناقشة النتائج:

أولاً– مناقشة النتائج المتعلقة بالإجابة عن السؤال الأول: أظهرت نتائج التحليل لإجابات الطلبة على الفقرة السابعة في أداة الدراسة (الاختبار)، وجود معنيين لإشارة المساواة لدى طلبة الصف السادس هما: ١– معنى إشارة المساواة كعملية ٢– معنى إشارة المساواة كعلاقة، كما أظهرت النتائج أن النسبة الأكبر من الطلبة (٦٧%) ضمن عينة الدراسة لديهم فهم لإشارة المساواة كعملية. وتتفق هذه النتيجة مع دراسة كل من (Knuth et al., 2006; Rittle-Johnson et al., 2011)، وترتفع هذه النسبة إلى ٧٧% لدى الطلبة الذين يدرسون دون استخدام أوراق عمل، مما قد يشكل تحديا للمعلمين ومصدرا للمشكلات التي يمكن أن يواجهها الطلبة في دراسة الجبر مستقبلا (Carpenter et al., 2003).

ويرجح الباحث أن تعود هذه النسبة المرتفعة (في فهم إشارة المساواة كعملية) إلى عدة أسباب منها: عدم تعريف إشارة المساواة في كتب الرياضيات للمرحلة الأساسية الأولى، وطبيعة المسائل الحسابية التي تظهر فيها إشارة المساواة وتتطلب إيجاد نتيجة، وإلى الطريقة التي تُقرأ بها إشارة المساواة. وما يدعم هذا التفسير، ما جاء على لسان معلمي الرياضيات (لصفوف عينة الدراسة) الذين التقى بهم الباحث قبل تطبيق الاختبار، حيث أشار معظمهم إلى أنه في العادة لا يتم التركيز على معنى إشارة المساواة، فهم يفترضون أنها مفهومة ضمنا وأن مفهومها يمكن اكتسابه بسهولة. وعند سؤالهم عن طريقة قراءة الرمز " = " أثناء الحل، كانت إجابات بعضهم: "كم يساوي، تعطي، الناتج هو"، وهذه الإجابات تشبه إلى حد كبير إجابات الطلبة ممن تم تصنيف فهمهم لإشارة المساواة كعملية.

كما تشير النتائج إلى أن ٣٧% من طلبة المجموعة الثانية (مع أوراق عمل) لديهم فهم لإشارة المساواة كعلاقة، مقابل ٢٣% فقط من طلبة المجموعة الأولى (بدون أوراق عمل)، بالرغم من اعتمادهم نفس المنهاج. ويعزو الباحث هذا التباين إلى محتوى بعض أوراق العمل التي حصل عليها من معلمي الرياضيات في المجموعة الثانية، والتي تظهر تنوعا بطريقة طرح الأسئلة، حيث يركز بعضها

على فهم إشارة المساواة كعلاقة، مثل وجود عمليات حسابية في كلا طرفي إشارة المساواة بالرغم من عدم وجود مثل هذه الأسئلة في كتب الرياضيات للصفوف الأربعة الأولى ويتفق هذا التفسير مع نتائج دراسة كل من ماكنيل ورفاقه (McNeil et al., 2006) ودراسة مولينا ورفاقها (Molina et al., 2009) حيث أظهرت نتائج هاتين الدراستين أنَّ وجود عمليات حسابية في كلا طرفي المساواة يسهم بشكل كبير في تحقيق فهم أفضل لإشارة المساواة كعلاقة. ومن جهة أخرى هناك العديد من أوراق العمل التي يمثل محتواها نسخا مماثلة للتمرينات الموجودة في الكتاب، وهذا قد يفسر نسبة الـ ٦٣% من طلبة المجموعة الثانية والذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعملية، على الرغم من استخدامهم أوراق عمل.

وفيما يتعلق بالطلبة الذين تم تصنيف إجاباتهم "غير ذلك" فقد أشارت نتائج الدراسة إلى أن ٢.٥% من طلبة المجموعة الثانية مقابل ٩.٧% من طلبة المجموعة الأولى كان لديهم مشكلة في التعبير الكتابي أو لم يكتبوا إجابة للفقرة السابعة في الاختبار. وتشير نتائج دراسة جونز (Jones, 2008) إلى أن سبب الضعف لدى الطلبة في التعبير الكتابي عن معنى إشارة المساواة قد يعود إلى شكل الفقرة، فحتى المسائل اللفظية التي اعتادوا عليها تتطلب منهم التعبير عنها عدديا، ثم إجراء حسابات وإيجاد نتيجة. وهذا أيضا ما أكده معلمو الرياضيات الذين راقبوا على الاختبار، فقد أفادوا أن معظم الطلبة سألوا عن كيفية الإجابة عن هذه الفقرة، حيث وجدوها غريبة في اختبار الرياضيات.

ثانيًا- مناقشة النتائج المتعلقة بالإجابة عن السؤال الثاني:

أظهرت النتائج أن هناك فروقا حقيقية بين الطلبة ضمن عينة الدراسة في قدرتهم على حل المسألة الحسابية تعزى لفهم إشارة المساواة (كعملية، كعلاقة). حيث إنَّ الطلبة الذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعلاقة، يمتلكون قدرة أكبر على حل المسألة الحسابية من الطلبة الذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعملية. وتتفق هذه النتيجة مع نتائج العديد من الدراسات (Gray & Tall, 1992; Hattikudur & Alibali, 2010; McNeil et al., 2006; Molina et al., 2009) والتي أشارت إلى أنَّ فهم إشارة المساواة كعلاقة يزيد من قدرة الطلبة على حل المسائل الجبرية.

ولمعرفة حقيقة هذه الفروق، والدرجة التي يمكن أن تعزى فيها إلى نوع الفهم لإشارة المساواة (كعملية، كعلاقة) وليس إلى القدرة العامة في الرياضيات، فقد أشار الباحث في الطريقة والإجراءات، وكيفية تطويره أداة الدراسة (الاختبار) إلى طريقة اختيار شكل الفقرات ومحتواها بما يضمن أن تعتمد فقط على نوع الفهم لإشارة المساواة. كما أن الأعداد المستخدمة في بناء الفقرات تألفت من منزلة واحدة أو اثنتين لتجنب الأخطاء الحسابية التي يمكن أن يقع فيها الطلبة أثناء الحل. أما بخصوص الفقرة الثالثة في الاختبار فإن حلها لا يعتمد على إجراء العمليات الحسابية. وبهذا يضمن الباحث أن تكون الفروق في قدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية مردها نوع الفهم لديهم والمتعلق بإشارة المساواة.

ولمعرفة أهمية فهم الطلبة في المرحلة الأساسية الأولى لإشارة المساواة كعلاقة، وكيف ينعكس هذا الفهم في قدرتهم على حل المسألة الحسابية، فإننا بحاجة إلى تحليل إجاباتهم بشكل أكثر تعمقا على الأشكال المتنوعة لفقرات الاختبار. ولتسهيل المقارنة، ارتأى الباحث عرض مناقشة إجابات الطلبة في قسمين حسب نوع الفهم لإشارة المساواة.

أ- مناقشة إجابات الطلبة الذين لديهم فهم لإشارة المساواة <u>كعملية</u> على فقرات الاختبار:

أظهرت نتائج الاختبار أن ٩٠% من طلبة هذه المجموعة نجحوا في حل جميع المسائل الحسابية التي تتضمن عملية حسابية واحدة (جمع أو طرح) في إحدى طرفيها أو عمليتين حسابيتين متشابهتين (جمع) في كلا طرفي المساواة (□+ ٧ = ١٥، ٧ + ١١ = □ + ٦) في الفقرة الأولى في الاختبار، في حين أنهم واجهوا صعوبة في المسائل التي تحوي إشارة الضرب والمسائل التي تحوي عمليتين حسابيتين على طرفي المساواة (١١ × 111 = □ ، ١٢ ×□ = ٥٦ – ٢٠) وهذه القدرة تتفق مع فهم إشارة المساواة كعملية. إلا أن بعض الطلبة كانت إجاباتهم على بعض المسائل الحسابية التي تتضمن عمليتين حسابيتين على طرفيها تشير إلى فهمهم لإشارة المساواة كعملية بحته أكثر من غيرهم، ففي المسألة (٧ + ١١ = □ + ٦) ٣% من طلبة هذه المجموعة كانت إجابتهم ١٦ حيث إنَّهم لم ينتبهوا إلى وجود عملية حسابية أخرى على يسار إشارة المساواة (Carpenter et al., 2003) وقد يعود ذلك إلى طبيعة المسائل التي اعتادوا عليها.

وفيما يتعلق بالفقرة الثانية في الاختبار والتي تتطلب حكما على جملة عددية بـ (صح، خطأ، لا أعرف) فلم يختر أي طالب الخيار الثالث (لا أعرف)، وقد واجه طلبة هذه المجموعة صعوبة في المسألة (١٥ + ٦ = ٧ + ٨ + ٦)، حيث إنَّ ٥٢% فقط عرفوا أنها صحيحة، ويرجح الباحث السبب (بعد الرجوع إلى معلمي الرياضيات لصفوف عينة الدراسة) إلى وجود عدد مختلف من الأعداد على طرفي المساواة مما دفع العديد من الطلبة إلى الإجابة عنها بـ (لا) دون إجراء الحسابات.

أما الفقرة الثالثة في الاختبار والتي تتطلب ملاحظة " أن إجراء نفس العملية الحسابية على كلا طرفي المساواة لا يؤثر عليها" فبالرغم من وجود عبارة واضحة **دون إجراء الحسابات** قام جميع الطلبة في هذا المجموعة بإجراء حسابات، نجح منهم ٢٠% في معرفة أن طرفيها متساويان، معتبرين الحسابات التي أجروها بمثابة التبرير المطلوب في السؤال دون أن يلتفتوا إلى التعليمات.

ولم تختلف طريقة إجابتهم على الفقرة الرابعة، حيث قاموا أيضا بإجراء الحسابات مع وجود عبارة واضحة تمنع ذلك، لكن إجاباتهم كانت أفضل من الفقرة السابقة، حيث إنَّ ٥٥% منهم عرفوا أنها صحيحة. وتشير نتائج دراسة هنتر (Hunter, 2007) إلى أنَّ السبب يمكن أن يعود إلى وجود عملية حسابية واحدة في كل طرف، كما أن الطلبة يألفون عملية الجمع أكثر من الطرح. لكن لم ينجح أي منهم بإعطاء تفسير آخر غير الحسابات.

وفي الفقرة الخامسة التي تضم مسألتين (٨٩٨ + ١٣ = ٨٩٧ + □ ، ٤٣ + □ = ٤٨ + ٧٦) وتتطلب إيجاد طريقة مختصرة للحل، لم ينجح أي من طلبة هذه المجموعة في إيجاد حل مختصر، بل لجؤوا لإجراء عمليات حسابية طويلة، حيث إنَّ ١٥% و ٣٨% من طلبة هذه المجموعة نجحوا في حل المسألتين (على التوالي) ويمكن أن يعود الفرق في هذه النسبة إلى أن المسألة الأولى تتضمن أعدادا من ثلاث منازل مما يزيد من فرصة وقوعهم بأخطاء حسابية.

وبالنسبة للفقرة السادسة (والأخيرة) فبالرغم من وجود تعليمات واضحة بخصوص استخدام نفس العدد في الحل في كلا طرفي المساواة والتأكيد على هذه التعليمات من قبل المعلم المراقب، إلا أن ما يقارب ٦٠% من الطلبة في هذه المجموعة استخدموا أعدادا مختلفة في كلا الطرفين، نجح منهم ١٠% في توفيق

إجابات مثل (٢ × ٤ = ٩ – ١)، لكن إجاباتهم اعتبرت خاطئة حسب تعليمات تصحيح الاختبار، بينما ٢% فقط من طلبة هذه المجموعة نجحوا في حل المسألة الأولى فقط. ويرجح الباحث السبب في ذلك إلى أنَّ حل المسألة الأولى يحتاج ثلاث محاولات فقط عند تجريب الأعداد على الترتيب ١، ٢، ٣ ،... بينما حل المسألة الثالثة يحتاج خطوات أكثر، فربما وجد الطلبة هذه الطريقة غير مجدية. وبالنسبة للمسألة الثانية قد يعود سبب عدم قدرتهم على حلها أن شكل المسألة غير مألوف حيث لا يوجد فيها أعداد (□ +□ = □ × □).

ب- مناقشة إجابات الطلبة الذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعلاقة على فقرات الاختبار:

أظهرت النتائج أن ٩٥% من طلبة هذه المجموعة نجحوا في حل جميع المسائل ضمن الفقرة الأولى باستثناء المسألة (١١ × □ = ١١١)، حيث إنَّ ٢% فقط من طلبة هذه المجموعة تمكنوا من حلها. وفي الفقرة الثانية في الاختبار واجه طلبة هذه المجموعة صعوبة في الحكم على صحة المسألة ((١١ – ٨) – ٤ = ١١ – (٨ – ٤))، حيث إنَّ ٤٠% منهم فقط عرفوا أنها خاطئة. أما في الفقرة الثالثة فقد نجح ١٥% من طلبة هذه المجموعة بإعطاء تبرير لصحة الجملة العددية (٢٥ + ٧٦ – ١٣ = ١٣١ – ١٣) دون إجراء الحسابات كما هو مطلوب، في حين أن ما يقارب ٨٢% من طلبة هذه المجموعة عرفوا أنها صحيحة عن طريق إجراء العمليات الحسابية.

وفي الفقرة الرابعة لم ينجح أي من طلبة هذه المجموعة في إعطاء تبرير للجملة العددية (٦٧ + ٨٦ = ٦٨ + ٨٥) دون إجراء الحسابات إلا أن جميع طلبة هذه المجموعة عرفوا أنها صحيحة عن طريق إجراء العمليات الحسابية أيضا. وبالنسبة للفقرة الخامسة نجح ٨% فقط (مع التشجيع) من طلبة هذه المجموعة في حل المسألة الأولى (٨٩٨ + ١٣ = ٨٩٧ + □) بطريقة مختصرة بينما قام بقية الطلبة بإجراء عمليات حسابية طويلة نجح منهم ٥٧% فقط في إيجاد إجابة صحيحة، وقد يعود ذلك أيضا لاحتواء المسألة على أعداد من ثلاث منازل مما يزيد من فرصة وقوع الطلبة بأخطاء حسابية (Rittle-Johnson et al., 2011). أما في الفقرة السادسة والأخيرة فإن ما يقارب ٥٢% من طلبة هذه المجموعة حاولوا حل المسائل باستخدام أعداد مختلفة على طرفي المساواة بالرغم من وجود تعليمات واضحة بهذا الخصوص، في حين نجح ١١% منهم فقط في

إيجاد حل للمسألة (٢ × □ = ٩ − □) عن طريق التجريب، في حين أن طالباً واحداً فقط ضمن هذه المجموعة نجح في حل المسألة (□ +□ = □ × □) أيضا عن طريق التجريب أما المسألة الأخيرة (٥ + □ = ٢١ − □) فلم يتمكن أي طالب من هذه المجموعة أيضا من حلها.

ثالثا: مناقشة النتائج المتعلقة بالإجابة عن السؤال الثالث:

أظهرت نتائج الدراسة وجود تفاعل بين نوع الفهم لإشارة المساواة (كعملية، كعلاقة) وطبيعة الأنشطة الصفية (مع التركيز على أوراق العمل، دون التركيز على أوراق العمل) في مقدرة الطلبة على حل المسألة الحسابية وتتفق هذه النتيجة مع نتائج دراسة (Jones et al., 2013)، حيث إنَّ الطلبة الذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعملية ويدرسون بالتركيز على أوراق العمل يكوِّنون فهما أفضل لإشارة المساواة من الطلبة الذين لا يستخدمون أوراق العمل، مما ينعكس في قدرتهم في حل المسائل الحسابية. وتبدو هذه النتيجة منطقية عند النظر إلى أوراق العمل كفرصة أكبر للتدرب على إجراء العمليات الحسابية، كما أن تنوع المسائل في أوراق العمل قد ينمي لدى الطلبة فهما لإشارة المساواة قد لا يصل إلى فهمها كعلاقة لكنه يكفي لرفع مستواهم في فهم إشارة المساواة إلى المرحلة الانتقالية بين فهمها كعملية وفهمها كعلاقة (Rittle-Johnson et al., 2011)، وعند قياسها قد نصنف فهم طالب لإشارة المساواة كعملية، لكن مستواه في الحقيقة يتذبذب بين النوعين وبالتالي يكون أَداءُه أفضل.

أما بالنسبة للطلبة الذين لديهم فهم لإشارة المساواة كعلاقة، فتشير النتائج إلى أن الذين يدرسون منهم مع التركيز على أوراق العمل يكونون فهما أفضل لإشارة المساواة، وبالتالي ينعكس في قدرتهم على حل المسائل الحسابية. ولكنهم ومع ذلك – كما أشارت النتائج – لم ينجحوا في تفسير بعض العبارات المتعلقة بفهم إشارة المساواة كعملية، لذا فهم يحتاجون إلى المزيد من الأنشطة التي تعمق فهمهم لإشارة المساواة.

التوصيات:

في ضوء ما توصلت إليه الدراسة من نتائج، يوصي الباحث بما يأتي:

١. هناك حاجة لتطوير مقاييس واختبارات موثوقة تقيس الفهم الحقيقي لموضوعات الرياضيات، ولا تركز فقط على استظهار خوارزميات وتطبيق إجراءات.

٢. من الضروري أن يستخدم معلمو الرياضيات أوراق عمل تتضمن تنوعا في طرح المسائل الحسابية.

٣. توجيه معلمي المرحلة الأساسية الأولى إلى أهمية تكوين الطلبة فهما لإشارة المساواة كعلاقة قبل انتقالهم لدراسة الجبر.

٤. إجراء المزيد من الدراسات حول مفاهيم أخرى مماثلة لإشارة المساواة في المرحلة الأساسية.

المراجع

Bickmore-Brand, J. (1990). *Language in Mathematics*. Portsmouth, NH: Heinemann Publishing.

Brown, R. (2010). *Developmental Understanding of the Equals Sign and its Effects on Succcess in Algebra* (Unpublished dissertation). Boise State University.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann Publishing.

Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 5, 232–236.

Gray, E., & Tall, D. (1992). Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, 142, 6–10.

Gray, E., & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process. *Mathematics Educational Research Journal*, *19*, 23–40.

Hattikudur, S., & Alibali, M. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107, 15–30.

Hunter, J. (2007). Relational or calculational thinking: students solving open number equivalence problems. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, 1, 421–429.

Jones, I. (2008). A diagrammatic view of the equals sign: Arithmetical equivalence as a means, not an end. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 151–165.

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Evans, R. (2013). Teaching the substitutive conception of the equals sign. *Research in Mathematics Education*, 15(1), 34–49.

Jones, I., & Pratt, D. (2006). Connecting the equals sign. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 301–325.

Jones, I., & Pratt, D. (2012). A substituting meaning for the equals sign in arithmetic notating tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(1), 2–33.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibabi, M. (2006). Does understanding the equal sign matter: evidence from solving equations. Journal *for Research in Mathematics Educations*, 37, 297–312.

Koehler, J. (2004). *Learning to think relationally: thinking relationally to learn* (Unpublished dissertation). University of Wisconsin-Madison.

Li, X., Ding, M., Capraro, M., & Capraro, R. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, 26(2), 195–217.

McNeil, N. (2004). You'll see what you mean: Students encode equations based on their knowledge of arithmetic. *Cognitive Science*, 283(3), 451–466.

McNeil, N., & Alibali, M. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development*, 76(4), 883–899.

McNeil, N., Fyfe, E., Petersen, L., Dunwiddie, A., & Brletic-Shipley, H. (2011). Benefits of practicing 4 = 2 + 2: Nontraditional problem formats facilitate children's understanding of mathematical equivalence. *Child Development*, 82(5), 1620–1633.

McNeil, N., McNeil, L., Knuth, E., Alibali, M., Stephens, A., Hattikudur, S., & Krill, D. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367–385.

Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an Operational to a Relational Conception of the Equal Sign. Third Graders' Developing Algebraic Thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61–80.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 341–368.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

National Council of Teacher of Mathematics. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten Through Grade 8 Mathematics*: A Quest for Coherence. Reston, VA.

Pirie, S., & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2), 159–181.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P., Taylor, R., & McEldoon, K. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, 103(1), 85–104.

Rivera, F. (2006). Changing the face of arithmetic: teaching children algebra. *Teaching Children Mathematics*, 12, 306–311.

Saenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretation of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 153–187.

Sherman, J., & Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and non symbolic contexts: benefits of solving problems with manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 101(1), 88–100.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Educational Research Journal*, 15, 122–137.